Introduction

Premier chapitre

Etude d'un problème de bifurcation associé à une fonction convexe, asymptotiquement linéaire

On étudie le problème

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{dans } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où:

- Ω est un ouvert borné connexe régulier de $\mathbf{R}^N$;
- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une application de classe C^1, convexe, non négative, telle que $f(0) > 0$ et $f'(0) > 0$;
- λ est un paramètre positif.

On sait (voir, par exemple, [BN]), qu'il existe $\lambda^\star \in (0, \infty)$ tel que

- il y a une solution de (1) pour chaque $\lambda < \lambda^\star$;
- si $\lambda > \lambda^\star$, il n'y a aucune solution;
- pour $\lambda < \lambda^\star$ il existe une solution minimale $u(\lambda)$. De plus, $u(\lambda)$ est l'unique solution stable du problème (1) et l'application $\lambda \longmapsto u(\lambda)$ est convexe et croissante.

Quelques questions naturelles concernant l'étude du problème (1) sont:

i) l'existence d'une solution si $\lambda = \lambda^*$;

ii) le comportement des solutions $u(\lambda)$ pour $\lambda \nearrow \lambda^\star$;

iii) l'existence et le comportement d'autres solutions.

Dans le cas où f est sur-linéaire et sous-critique, Crandall et Rabinowitz ont démontré (voir [CR]) qu'il existe $u_\star = \lim_{\lambda \nearrow \lambda^\star} u(\lambda)$ dans $C^1(\overline{\Omega})$. Dans le cas où f est sur-critique, la géometrie de Ω devient significative.

En collaboration avec P. Mironescu, on a étudié le cas où f est asymptotiquement linéaire, c'est-à-dire

$$(2) \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t} = a \in (0, \infty)\,.$$

Le comportement des solutions $u(\lambda)$ pour $\lambda \nearrow \lambda^\star$ varie selon la position du graphe de f par rapport la droite $y = ax$. L'étude du comportement asymptotique de $u(\lambda)$ est liée à l'observation que $u(\lambda)$ est positive et sur-harmonique. Donc, d'après un théorème classique, il y a deux posibilités quand $\lambda \nearrow \lambda^\star$:

i) $u(\lambda)$ converge uniformément (à une sous-suite près) vers $+\infty$ sur tout compact de Ω.

ii) $u(\lambda)$ converge uniformément (à une sous-suite près) dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Soit λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$. Les résultats qu'on a obtenus sont les suivants:

Théorème 1. *Si $f(t) \geq at$ pour tout t, alors*
i) $\lambda^* = \dfrac{\lambda_1}{a}$.
ii) $\lim\limits_{\lambda \to \lambda^*} u(\lambda) = \infty$, uniformément sur les sous-ensembles compacts de Ω.
iii) $u(\lambda)$ est l'unique solution de (1)+(2) pour $\lambda \in (0, \lambda^*)$.
iv) le problème (1)+(2) n'a pas de solution si $\lambda = \lambda^*$.

Théorème 2. *S'il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(t_0) < at_0$, alors*
i) $\lambda^* \in (\dfrac{\lambda_1}{a}, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_0})$, où $\lambda_0 = \min\limits_{t>0} \dfrac{f(t)}{t}$.
ii) le problème (1)+(2) admet une seule solution, u^*, pour $\lambda = \lambda^*$.
iii) $\lim\limits_{\lambda \to \lambda^*} u(\lambda) = u^*$, uniformément sur Ω.
iv) si $\lambda \in (0, \dfrac{\lambda_1}{a}]$, $u(\lambda)$ est l'unique solution du problème (1)+(2).
v) si $\lambda \in (\dfrac{\lambda_1}{a}, \lambda^*)$, le problème (1)+(2) a au moins une solution instable $v(\lambda)$.
De plus, pour tout choix de $v(\lambda)$ on a
vi) $\lim\limits_{\lambda \searrow \frac{\lambda_1}{a}} v(\lambda) = \infty$, uniformément sur les sous-ensembles compacts de Ω.
vii) $\lim\limits_{\lambda \nearrow \lambda^*} v(\lambda) = u^*$, uniformément sur Ω.

L'existence d'une solution instable $v(\lambda)$ est prouvée en appliquant le théorème du col d'Ambrosetti-Rabinowitz à une fonctionnelle perturbée. On donne aussi quelques estimations sur la vitesse de croissance de $u(\lambda)$ vers $+\infty$ dans les conditions du Théorème 1.

Deuxième chapitre

L'équation de Ginzburg-Landau

L'étude du comportement asymptotique de l'équation de Ginzburg-Landau a été initiée dans une série de travaux par F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein (voir [BBH1-4]) et H. Brezis, F. Merle et T. Rivière (voir [BMR1-2]). Il s'agit de l'étude des points critiques de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_G \mid \nabla u \mid^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G (1- \mid u \mid^2)^2 \tag{3}$$

dans la classe

$$H^1_g(G) = \{u \in H^1(G,);\ u = g \text{ sur } \partial G\}$$

ainsi que leur comportement asymptotique quand $\varepsilon \to 0$. Ici, G est un domaine borné et régulier de $\mathbf{R}^2$ et $g \in C^\infty(\partial G, S^1)$. Les points critiques de E_ε vérifient l'équation de Ginzburg-Landau

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\, u_\varepsilon(1- \mid u_\varepsilon \mid^2)w \quad \text{dans} \quad G \\ \quad u_\varepsilon = g \quad \text{sur} \quad \partial G\ . \end{cases} \tag{4}$$

Première partie

Solutions périodiques de l'équation $-\Delta v = v(1- \mid v \mid^2)$ dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$

Un changement d'échelle permet d'étudier le problème (4) dans le domaine $\dfrac{G}{\varepsilon}$. Donc, le comportement asymptotique pour $\varepsilon \to 0$ des solutions de l'équation de Ginzburg-Landau nous amène à l'étude des solutions du problème

$$-\Delta v = v(1- \mid v \mid^2) \quad \text{dans } \mathbf{R}^2\ . \tag{5}$$

On étudie (avec P. Mironescu) les solutions périodiques de l'équation de Ginzburg-Landau en dimensions 1 et 2. Dans la première partie, pour $T > 0$ fixé, on cherche les solutions $v : \mathbf{R} \to$ de

$$-v'' = v(1- \mid v \mid^2) \quad \text{dans } \mathbf{R}^2 \tag{6}$$

et ayant T comme période principale. Pour chacune de ces solutions et pour $x_0 \in \mathbf{R}$, $\alpha \in$ avec $\mid \alpha \mid = 1$, l'application

$$x \longmapsto \alpha v(x_0 \pm x) \tag{7}$$

est aussi une solution. Pour éliminer cette situation, on établit d'abord pour les solutions de (6) une forme canonique:

$$\begin{cases} v_1(0) = a > 0 \\ v_1'(0) = 0 \\ v_2(0) = 0 \\ v_2'(0) = b \geq 0 \quad , \end{cases} \tag{8}$$

où $v = v_1 + iv_2$ et $a = \max |v|$. Le système (6)+(8) donne toutes les solutions de (6) qui sont distinctes du point de vue géométrique, c'est-à-dire qui ne peuvent pas être obtenues l'une de l'autre par un procédé du type (7).

Le résultat principal est

Théorème 1. *i) Si $T \leq 2\pi$, il n'y a aucune solution T-périodique.*

ii) Si $T > 2\pi$, il existe une unique solution réelle (c'est-à-dire, avec $v_2 \equiv 0$) de (6)+(8).

iii) Il existe $T_1 > 2\pi$ tel que, pour chaque $2\pi < T \leq T_1$, toutes les solutions T-périodiques de (6)+(8) sont la solution réelle de ii), ainsi que

$$v(x) = \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{T^2}}\, e^{i\frac{2\pi}{T}x}\,, \quad \textit{pour chaque } x \in \mathbf{R}\,.$$

iv) Pour chaque $T > T_1$, il y a d'autres solutions T-périodiques que celles trouvées à iii).

v) Pour chaque $T > 0$, le nombre de solutions T-périodiques de (6)+(8) est fini.

vi) Une borne inférieure pour le nombre de solutions $T-$périodiques est donnée par

$$\frac{5}{8}T^2 + O(T\,\log T) \quad \textit{quand } T \to \infty\,.$$

Dans $\mathbf{R}^2$, les résultats qu'on a obtenus dépendent essentiellement du parallélogramme P des périodes. On démontre que si P est suffisamment petit, alors il n'existe aucune solution non-constante de (5). Si P est un rectangle suffisament grand, alors il existe des solutions P-périodiques réelles du problème (5).

Deuxième partie

Sur l'équation de Ginzburg-Landau avec poids

On suppose que la donnée au bord g a un degré topologique $d = \deg(g, \partial G) > 0$. On considère un poids $w \in C^1(\overline{G}, \mathbf{R})$, $w > 0$ dans $\overline{G}$ et on se propose d'étudier l'énergie de Ginzburg-Landau correspondante:

$$E_\varepsilon^w(u) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G (1-|u|^2)^2 w .$$

Soit u_ε un minimiseur de E_ε^w dans la classe $H_g^1(G, \mathbf{R}^2)$. F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein (voir [BBH2], [BBH4]) ont étudié le comportement des minimiseurs et la configuration limite dans le cas $w \equiv 1$ et ont introduit la notion d'énergie renormalisée.

Dans [4] et [5] on a étudié (avec C. Lefter) les mêmes problèmes pour le cas d'un poids régulier et positif, en donnant ainsi une reponse au problème ouvert No. 2 de [BBH4], p. 137. On démontre essentiellement que le comportement des minimiseurs est du même type que dans le cas $w \equiv 1$, la seule difference apparaîssant dans l'expression de l'énergie renormalisée et, donc, dans la localisation des singularités à la limite. Notre résultat est le suivant:

Théorème 1. *Il existe une suite $\varepsilon_n \to 0$ et exactement d points $a_1, \cdots, a_d$ dans G tels que*

$$u_{\varepsilon_n} \to u_\star \quad \text{dans } H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{G} \setminus \{a_1, ..., a_d\}; \mathbf{R}^2)\,,$$

où $u_\star$ est l'application harmonique canonique associée aux singularités $a_1, \cdots, a_d$ de degrés $+1$ et à la donnée au bord g.
De plus, si $W(b)$ signifie l'énergie renormalisée associée à la configuration $b = (b_1, \cdots, b_d)$ de degrés $\overline{d} = (+1, \cdots, +1)$, alors $a = (a_1, \cdots, a_d)$ minimise la fonctionnelle

$$\widetilde{W}(b) = W(b) + \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{d} \log w(b_j)$$

parmi toutes les configurations $b = (b_1, \cdots, b_d)$ de d points distincts dans G.

On a

$$\lim_{n\to\infty} \{E_{\varepsilon_n}^w(u_{\varepsilon_n}) - \pi d \,|\log \varepsilon_n|\} = W(a) + \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{d} \log w(a_j) + d\gamma\,,$$

où γ est une constante universelle.

Un autre résultat qui caracterise le comportement asymptotique des minimiseurs est

Théorème 2. *Soit*

$$W_n = \frac{1}{4\varepsilon_n^2}\,(1-|u_{\varepsilon_n}|^2)^2 w\,.$$

Alors la suite (W_n) converge dans la topologie faible $\star$ de $C(\overline{G})$ vers

$$W_\star = \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{d} \delta_{a_j} .$$

L'expression de l'énergie renormalisée $\widetilde{W}$ permet, en utilisant les résultats de Bethuel, Brezis et Hélein concernant la valeur de la différentielle de W, de prouver une propriété du type "vanishing gradient" pour le cas d'un tel poids. Soit Φ_0 l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \Delta \Phi_0 = 2\pi \displaystyle\sum_{j=1}^{k} d_j \delta_{b_j} \ , \quad \text{dans } G \\ \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} = g \wedge g_\tau \ , \quad \text{sur } \partial G \\ \displaystyle\int_{\partial G} \Phi_0 = 0 \end{cases}$$

et, pour chaque $j = 1, \cdots, d$,

$$S_j(x) = \Phi_0(x) - \log \mid x - b_j \mid$$

$$R_0(x) = S_j(x) - \sum_{i \neq j} \log \mid x - b_i \mid \ .$$

Notre résultat est le suivant:

Théorème 3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
i) $a = (a_1, ..., a_d)$ est un point critique de l'énergie renormalisée $\widetilde{W}$.
ii) $\nabla S_j(a_j) = \dfrac{1}{4} \dfrac{\nabla w(a_j)}{w(a_j)}$, pour chaque j.
iii) $\nabla H_j(a_j) = \dfrac{1}{4w(a_j)} \left(-\dfrac{\partial w}{\partial x_2}(a_j), \dfrac{\partial w}{\partial x_1}(a_j) \right)$, pour chaque j.
iv) $\nabla R_0(a_j) + \displaystyle\sum_{i \neq j} \dfrac{a_j - a_i}{\mid a_j - a_i \mid^2} = \dfrac{1}{4} \dfrac{\nabla w(a_j)}{w(a_j)}$, pour chaque j.

Comme dans [BBH4], Chapitre I.4, on peut définir l'énergie renormalisée en considérant un problème variationnel dans un domaine avec des trous. Avec la méthode "shrinking holes" de Bethuel, Brezis et Hélein on démontre

Théorème 4. *Soit*

$$\widetilde{W}(b, \overline{d}, g) = W(b, \overline{d}, g) + \frac{\pi}{2} \left(\sum_{j=1}^{k} d_j^2 \log w(b_j) \right) ,$$

où $W(b, \overline{d}, g)$ représente l'énergie renormalisée associée à la configuration $b = (b_1, \cdots, b_k)$ de degrés $\overline{d} = (d_1, \cdots, d_k)$ et à la donnée au bord g. Pour $\eta > 0$ suffisamment petit, soit u_η un minimiseur de E_ε^w dans

$$G_\eta^w = G \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \overline{B}\left(b_j, \frac{\eta}{\sqrt{w(b_j)}}\right).$$

Alors

$$\frac{1}{2}\int_{G_\eta^w} |\nabla u_\eta|^2 = \pi(\sum_{j=1}^{k} d_j^2) \mid \log\eta \mid + \widetilde{W}(b, \overline{d}, g) + O(\eta), \quad \textit{quand } \eta \to 0\,.$$

Ce résultat montre que l'énergie renormalisée $\widetilde{W}$ représente ce qu'il reste de l'énergie après qu'on enlève l'énergie "du noyau" $\pi d \mid \log\eta \mid$.

Troisième partie

Comportement asymptotique des minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau avec un poids qui s'annule

On continue dans [6] (en collaboration avec C. Lefter) l'étude des minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau, cette fois-ci pour un poids qui s'annule.

Soit $x_0 \in G$ et $w \in C^1(\overline{G}, \mathbf{R})$ tels que $w(x_0) = 0$, $w > 0$ dans $\overline{G} \setminus \{x_0\}$ et $w(x) \sim \mid x - x_0 \mid^p$ dans un voisinage de x_0, où $p > 0$. Notre résultat sur la convergence des minimiseurs u_ε de E_ε^w est le suivant:

Théorème 1. *Pour chaque suite $\varepsilon_n \to 0$, il existe une sous-suite (designée aussi par ε_n), k points $a_1, \cdots, a_k$ dans G et des entiers strictement positifs $d_0, d_1, \cdots, d_k$ avec $d_1 + \cdots d_k = d$ tels que (u_{ε_n}) converge dans $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{G} \setminus \{x_0, a_1, \cdots, a_k\}; \mathbf{R}^2)$ vers $u_\star$, qui est l'application harmonique canonique à valeurs dans S^1 associée aux points $x_0, a_1, \cdots, a_k$ avec les degrés correspondants positifs $d_0, d_1, \cdots, d_k$ et à la donnée au bord g.*

Le nombre de points qui s'accrochent à la limite vers le zéro du poids dépend de l'ordre de croissance $p > 0$ de w autour de x_0. Plus précisément, soit $w(x) = \mid x - x_0 \mid^p + $ $+ f(\mid x \mid) \cdot \mid x - x_0 \mid^{p+1}$ dans un petit voisinage de x_0, où $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une application de classe C^1. On démontre

Théorème 2. *1) Soit $p > 0$ un nombre réel qui n'est pas un entier multiple de 4. Alors*

i) Si $d \leq \dfrac{p}{4} + 1$, alors $d_0 = d$.

ii) Si $d > \dfrac{p}{4} + 1$, *alors* $d_0 = \left[\dfrac{p}{4}\right] + 1$, *où* $[x]$ *désigne la partie entière du nombre réel* x. *De plus, la configuration limite* $a = (x_0, a_1, \cdots, a_k)$ *avec les degrés correspondants* $\overline{d} = (d_0, +1, \cdots, +1)$ *minimise l'énergie renormalisée*

$$\widehat{W}(b) = W(b, \overline{d}, g) + \frac{\pi}{2}\, p \sum_{j=1}^{k} \log \mid b_j \mid , \qquad b = (x_0, b_1, \cdots, b_k)\,.$$

2) Soit p *un entier multiple de 4. Si* $d < \dfrac{p}{4} + 1$, *alors* $d_0 = d$. *Le cas où* p *est un entier multiple de 4 est un cas critique, au sens que si* $d \geq \dfrac{p}{4} + 1$, *alors* d_0 *peut avoir différentes valeurs. Par exemple, si* $G = B_1$, $x_0 = 0$ *et* $w(x) =\mid x \mid^p$, *on a le même résultat que dans le cas 1).*

On donne un exemple pour $G = B_1$, $x_0 = 0$, $d = \dfrac{p}{4} + 1$, $w(x) =\mid x \mid^p$ dans un voisinage de x_0, mais $d_0 = \dfrac{p}{4}$, donc $k = 1$.

Quatrième partie

Problèmes de minimisation et les énergies renormalisées correspondantes

En collaboration avec C. Lefter on étudie dans [7] quelques problèmes de minimisation liés à l'énergie de Ginzburg-Landau.

1) *Singularités et degrés prescrits.*

Soit $a = (a_1, \cdots, a_k)$ une configuration de points distincts dans G et $\overline{d} = (d_1, \cdots, d_k) \in$ ^{k}. Soit $\deg(g, \partial G) = d = d_1 + \cdots + d_k$. Pour $\rho > 0$ suffisamment petit, soit

$$\Omega_\rho = G \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B(a_i, \rho)}\ ,\ \ \Omega = G \setminus \{a_1, ...a_k\}\ .$$

Soit v_ρ un minimiseur de l'énergie $\displaystyle\int_{\Omega_\rho} \mid \nabla v \mid^2$ dans la classe

$$\mathcal{F}_\rho = \{v \in H^1(\Omega_\rho; S^1);\ \deg(v, \partial G) = d \text{ et } \deg(v, \partial B(a_i, \rho)) = d_i,\ \text{pour } i = 1, ..., k\}\,.$$

Théorème 1. *On a l'estimation asymptotique*

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} \mid \nabla v_\rho \mid^2 = \pi\left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2\right)\log\frac{1}{\rho} + \widetilde{W}(a, \overline{d}) + O(\rho)\ , \quad \textit{quand } \rho \to 0.$$

De plus, l'énergie renormalisée $\widetilde{W}(a,\overline{d})$ est liée à l'énergie renormalisée $W(a,\overline{d},g)$ définie dans [BBH4] par la formule

$$\widetilde{W}(a,\overline{d}) = \inf_{\substack{g:\partial G\to S^1 \\ \deg(g,\partial G)=d}} W(a,\overline{d},g)$$

et l'infimum est atteint.

Pour le cas $G = B_1$ et $g(\theta) = e^{di\theta}$ on trouve des formules explicites pour les deux énergies renormalisées. Plus précisément, on démontre

Théorème 2. *On a*

$$W(a,\overline{d},g) == -\pi \sum_{i\neq j} d_i d_j \, \log \mid a_i - a_j \mid -\pi \sum_{i,j} d_i d_j \, \log \mid 1 - a_i \overline{a}_j \mid \ .$$

$$\widetilde{W}(a,\overline{d}) = -\pi \sum_{i\neq j} d_i d_j \, \log \mid a_i - a_j \mid +\pi \sum_{i,j} d_i d_j \, \log \mid 1 - a_i \overline{a}_j \mid \ .$$

2) *Une restriction supplémentaire pour la classe des fonctions test.*

Pour $A > 0$ fixé, soit w_ρ un minimiseur de $\displaystyle\int_{\Omega_\rho} \mid \nabla v \mid^2$ dans la classe

$$\mathcal{F}_{\rho,A} = \{v \in \mathcal{F}_\rho \, ; \int_{\partial G} \mid \frac{\partial v}{\partial \tau} \mid^2 \leq A\} \ .$$

Notre résultat est

Théorème 3. *On a*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} \mid \nabla w_\rho \mid^2 = \pi \left(\sum_{j=1}^{k} d_j^2 \right) \log \frac{1}{\rho} + \widetilde{W}_A(a,\overline{d}) + o(1) \ , \quad \textit{quand } \rho \to 0 \, .$$

De plus, l'énergie renormalisée $\widetilde{W}_A(a,\overline{d})$ est liée à $W(a,\overline{d},g)$ par

$$\widetilde{W}_A(a,\overline{d}) = \inf\{W(a,\overline{d},g); \ \deg(g;\partial G) = d \ \ \text{et} \ \ \int_{\partial G} \mid \frac{\partial g}{\partial \tau} \mid^2 \leq A\} \ .$$

3) *Une classe de minimiseurs de l'énergie de Ginzburg-Landau.*

Au lieu de considérer les minimiseurs de E_ε lorsqu'on prescrit la donnée au bord (comme dans [BBH4]), on est tenté de minimiser l'énergie de Ginzburg-Landau pour de degré au bord préscrit et le module 1 des fonctions test sur ∂G. Mais l'infimum de E_ε dans cette classe de fonctions n'est pas atteint, comme ont observé F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein. Donc, il est naturel de considérer, pour $A > 0$ fixé, les minimiseurs u_ε de E_ε dans la classe

$$\mathcal{H}_{d,A} = \{u \in H^1(G;\mathbf{R}^2);\ \mid u \mid = 1 \ \text{ sur } \ \partial G,\ \deg(u,\partial G) = d \ \text{ et } \ \int_{\partial G} \mid \frac{\partial u}{\partial \tau} \mid^2 \leq A\}\ .$$

On démontre

Théorème 4. *Pour chaque suite $\varepsilon_n \to 0$ il existe une sous-suite (désignée aussi par ε_n) et exactement d points $a_1, \cdots, a_d$ dans G tels que*

$$u_{\varepsilon_n} \to u_\star \quad \text{dans } H^1_{\text{loc}}(\overline{G} \setminus \{a_1, \cdots, a_d\};\mathbf{R}^2)\ ,$$

où $u_\star$ est l'application harmonique canonique à valeurs dans S^1 et singularités $a_1, \cdots, a_d$ de degrés +1. De plus, la configuration $a = (a_1, \cdots, a_d)$ minimise la fonctionnelle

$$\widetilde{W}_A(a,\overline{d}) := \min\{W(a,\overline{d},g);\ \deg(g;\partial G) = d \ \text{ et } \ \int_{\partial G} \mid \frac{\partial g}{\partial \tau} \mid^2 \leq A\}\ .$$

Cinquième partie

L'énergie renormalisée associée à une application harmonique

Soit $G \subset \mathbf{R}^2$ un domaine borné, régulier et simplement connexe et $g \in C^1(\partial G, S^1)$ telle que $\deg(g,\partial G) = d > 0$. Etant donné une configuration $a = (a_1, \cdots, a_k)$ de points distincts dans G et $\overline{d} = (d_1, \cdots, d_k) \in {}^k$ tel que $d_1 + \cdots d_k = d$, F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein ont introduit dans [BBH4] la notion d'application harmonique canonique $u_0 : \Omega = G \setminus \{a_1, \cdots, a_k\} \to S^1$ associée à $(a,\overline{d},g)$ comme

$$u_0(z) = \left(\frac{z - a_1}{\mid z - a_1 \mid}\right)^{d_1} \cdots \left(\frac{z - a_k}{\mid z - a_k \mid}\right)^{d_k} \cdot e^{i\varphi_0(z)} \qquad \text{si } \ z \in G,$$

où

$$\begin{cases} \Delta\varphi_0 = 0 & \text{dans } \ G \\ \ \ u_0 = g & \text{sur } \ \partial G\ . \end{cases}$$

Toute application harmonique $u : \Omega \to S^1$ avec $u = g$ sur ∂G et $\deg(u,a_j) = d_j$ pour $j = 1, \cdots, k$ a la forme

$$u = e^{i\psi} u_0 \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{9}$$

où

(10) $$\begin{cases} \psi(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \log \mid x - a_j \mid + \phi(x) \\ \psi = 0 \quad \text{sur } \partial G \\ \Delta\phi = 0 \quad \text{ dans } G. \end{cases} .$$

On introduit dans [8] (avec C. Lefter) une notion d'énergie renormalisée associée à une application harmonique u. Cette notion coïncide avec l'énergie renormalisée définie par Bethuel, Brezis et Hélein dans [BBH4] si $u = u_0$. Notre résultat est

Théorème 1. *Pour chaque application harmonique de la forme (9),*

$$\lim_{p \nearrow 2} \left\{ \frac{1}{2} \int_G \mid \nabla u \mid^p - \frac{\pi}{2-p} \sum_{j=1}^{k} (c_j^2 + d_j^2) \right\} + \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{k} (c_j^2 + d_j^2) \cdot \log \left(\sum_{j=1}^{k} (c_j^2 + d_j^2) \right) =: W(u)$$

existe et est fini. De plus,

$$W(u) = \lim_{\rho \to 0} \left\{ \frac{1}{2} \int_{G_\rho} \mid \nabla u \mid^2 - \pi \left(\sum_{j=1}^{k} (c_j^2 + d_j^2) \right) \log \frac{1}{\rho} \right\} .$$

En utilisant cette evaluation asymptotique on trouve une formule explicite pour l'énergie renormalisée $W(u)$. On démontre

Théorème 2. *Pour chaque application harmonique u,*

$$W(u) = W(a, \overline{d}, g) - \pi \sum_{j=1}^{k} c_j \phi_j(a_j) =$$

$$= W(u_0) - \pi \sum_{i \neq j} c_i c_j \log \mid a_i - a_j \mid - \pi \sum_{j=1}^{k} c_j \phi(a_j) \ ,$$

où ϕ a été défini dans (10).

REFERENCES

[B] H. Brezis, *Lectures on the Ginzburg-Landau Vortices,* Scuola Normale Superiore Pisa, 1995.

[BBH1] F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein, Limite singulière pour la minimisation des fonctionnelles du type Ginzburg-Landau, *C.R. Acad. Sc. Paris* **314** (1992), 891-895.

[BBH2] F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein, Tourbillons de Ginzburg-Landau et énergie renormalisée, *C.R. Acad. Sc. Paris* **317** (1993), 165-171.

[BBH3] F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein, Asymptotics for the minimization of a Ginzburg-Landau functional, *Calculus of Variations and PDE,* **1**(1993), 123-148.

[BBH4] F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein, *Ginzburg-Landau Vortices,* Birkhäuser, 1994.

[BMR1] H. Brezis, F. Merle et T. Rivière, Effets de quantification pour l'équation $-\Delta u = u(1-\mid u\mid^2)$ sur $\mathbf{R}^2$, *C.R. Acad. Sci. Paris,* **317** (1993), 57-60.

[BMR2] H. Brezis, F. Merle et T. Rivière, Quantization effects for $-\Delta u = u(1-\mid u\mid^2)$ in $\mathbf{R}^2$, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **126** (1994), 35-58.

[BN] H. Brezis et L. Nirenberg, *Nonlinear Functional Analysis and Applications to Partial Differential Equations* (à paraître).

[CR] M. Crandall et P.H. Rabinowitz, Some continuation and variational methods for positive solutions of non linear elliptic eigenvalues problems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **58** (1975), 207-218.

[GMP] Th. Gallouet, F. Mignot et J.P. Puel, Quelques résultats sur le problème $-\Delta u = \lambda e^u$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **307** (1988), 289-292.

[MP] F. Mignot et J.P. Puel, Sur une classe de problèmes non linéaires avec une non linéarité positive, croissante, convexe, *Comm. Part. Diff. Eq.,* **5** (1980), 791-836.

[S] M. Struwe, On the asymptotic behavior of minimizers of the Ginzburg-Landau model in 2-dimensions, *Diff. Int. Equations* **7** (1994), 1613-1624. Erratum, *Diff. Int. Equations* **8** (1995), p. 124.