Introduction

Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur certaines classes d'équations ou d'inéquations elliptiques non linéaires et s'organisent autour de quatre thèmes principaux: l'étude de propriétés qualitatives de solutions des problèmes elliptiques semi-linéaires et quasi-linéaires; l'analyse de solutions qui explosent à la frontière pour quelques classes de problèmes elliptiques semi-linéaires; l'étude de problèmes elliptiques non lisses via les théories de point critique de Clarke et Degiovanni, ainsi que le rôle des inégalités hemivariationnelles dans le traitement de quelques problèmes de mécanique.

Dans la première partie sont présentés quelques résultats qualitatifs pour diverses classes d'équations aux dérivées partielles elliptiques. On prouve en particulier l'existence et l'unicité de l'état fondamental pour un problème dans $\mathbf{R}^N$, l'existence d'une solution pour une classe de problèmes avec donnée au bord singulière, un résultat de multiplicité pour un problème sous critique sans compacité soumis à une petite perturbation, ainsi que des résultats d'existence ou de non existence pour un problème de bifurcation avec une donnée non linéaire sur le bord.

La deuxième partie porte sur l'étude de quelques classes de problèmes elliptiques semi-linéaires sur un domaine quelconque qui admettent des solutions explosant au bord (ou à l'infini). Notre analyse inclut l'équation logistique avec un coefficient qui peut s'annuler sur la frontière; dans ce cas on établit une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution explosant au bord ainsi que l'unicité et le comportement asymptotique de cette solution.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de quelques problèmes elliptiques multivoques. On démontre un résultat abstrait de multiplicité du type Ljusternik-Schnirelmann avec application dans le problème du pendule forcé. Ensuite on étudie parallèlement un problème sans compacité en utilisant les approches de Degiovanni et de Clarke. On considère aussi un problème symétrique soumis à une contrainte et avec une infinité de solutions et on étudie l'effet d'une perturbation arbitraire en montrant que le nombre de solutions tend vers l'infini si la perturbation tend vers zéro. On étudie également plusieurs résultats d'existence et de multiplicité pour des inégalités hemivariationnelles dans $BV(\Omega;\mathbf{R}^N)$. On conclut ce chapitre avec un résultat de multiplicité et de perturbation pour une inégalité variationnelle qui modélise le démarrage d'un tremblement de terre.

Dans la dernière partie de ce mémoire on analyse quelques problèmes issus de la théorie des inégalités hemivariationnelles. On prouve des résultats d'existence du type Hartman-Stampacchia et on étudie l'influence d'une perturbation arbitraire pour plusieurs classes de problèmes aux valeurs propres pour des inégalités hemivariationnelles avec symétrie.

Tous ces problèmes conduisent à des équations, systèmes ou inéquations posés dans des domaines bornés ou non bornés. On cherche des estimations *a priori* et des théorèmes de compacité et les principaux outils appliqués sont la méthode de sur et sous solutions, le principe du maximum et la théorie du point critique.

1 Problèmes elliptiques semi-linéaires et quasi-linéaires: existence et unicité des solutions

1.1 Existence et unicité de l'état fondamental pour un problème elliptique avec une non linéarité singulière

On considère le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = p(x)f(u) \quad \text{dans } \mathbf{R}^N \\ u > 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^N \\ u(x) \to 0 \quad \text{si} \quad |x| \to \infty\,, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

où $N > 2$ et les fonctions p et f satisfont les hypothèses:
(p1) $p \in C^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$, $\alpha \in (0,1)$;
(p2) $p > 0$ dans $\mathbf{R}^N$.
(p3) $\int\limits_0^\infty r \cdot \Phi(r)dr < \infty$, où $\Phi(r) = \max\limits_{|x|=r} p(x)$.
(f1) il existe $\beta > 0$ tel que l'application $u \longmapsto \dfrac{f(u)}{u+\beta}$ soit décroissante sur $(0, \infty)$;
(f2) $\lim\limits_{u \searrow 0} \dfrac{f(u)}{u} = +\infty$ et f est bornée dans un voisinage de $+\infty$.

Théorème 1 *Sous les hypothèses (f1), (f2), (p1)-(p3), le problème (1.1) a une seule solution $u \in C^{2+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$.*

Le résultat suivant montre le rôle de la condition (p3) en vue de l'existence d'une solution.

Théorème 2 *Soit p une fonction positive, radiale, continue sur $\mathbf{R}^N$ et telle que*

$$\int\limits_0^\infty rp(r)dr = \infty.$$

Alors le problème (1.1) n'a aucune solution positive radiale.

1.2 Solutions multiples d'un problème sous-critique dégénéré

Soient $N \geq 2$ et $2 < p < 2^* := 2N/(N-2)$. On considère le problème

$$-\mathrm{div}\,(a(x)\nabla u) + b(x)\,u = K(x)|u|^{p-2}u + \varepsilon\, g(x) \quad \text{dans } \mathbf{R}^N, \tag{1.2}$$

où les fonctions a, b, K et g satisfont les hypothèses

(A1) $a \in C(\mathbf{R}^N)$ et il existe $R_0 > 0$ tel que
$\{x;\, a(x) = 0\} \subset B(0, R_0)$ et $\dfrac{1}{a} \in L^q(B(0, R_0))$, pour un certain
$q > \dfrac{Np}{2N + 2p - Np}$;

(A2) $\lim_{|x|\to\infty} a(x) = a(\infty) \in \mathbf{R}_+$ et $0 \le a(x) \le a(\infty)$ dans $\mathbf{R}^N$;

(B) $\operatorname{ess}\lim_{|x|\to\infty} b(x) = b(\infty) \in \mathbf{R}_+$ et il existe $b_1 > 0$ tel que $b_1 \le b(x) \le b(\infty)$ a.e. $\mathbf{R}^N$

(K) $\operatorname{ess}\lim_{|x|\to\infty} K(x) = K(\infty) \in \mathbf{R}_+$ et $K(x) \ge K(\infty)$ a.e. dans $\mathbf{R}^N$;

(M) $\operatorname{meas}(\{x \in \mathbf{R}^N;\, b(x) < b(\infty)\} \cup \{x \in \mathbf{R}^N;\, K(x) > K(\infty)\}) > 0$.

Soit E le complété de $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_E^2 = \int_{\mathbf{R}^N} (a(x)|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\, dx.$$

On suppose que $g \in E^*$, $g \ne 0$.

L'effet d'une petite perturbation pour un problème elliptique semi-linéaire a été étudié dans Tarantello [49], où il est montré que si ε est assez petit, alors le problème (1.2) admet au moins deux solutions dans le cas critique $p = 2^*$ et non-dégénéré $a = 1$, pour un domaine borné, avec $b = 0$ et $K = 1$.

En utilisant le principe variationnel d'Ekeland ainsi que le théorème du col sans la condition de Palais-Smale (voir Brezis-Nirenberg [6, Theorem 2.2]) combiné avec une variante du lemme de Brezis-Lieb [5] on montre

THÉORÈME 3 *Sous les hypothèses (A1), (A2), (B), (K) et (M), il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que le problème (1.2) admet au moins deux solutions, si* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

1.3 Solutions multiples d'un problème critique dégénéré

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$, $N \ge 2$ et $\alpha \in (0, 2)$. On désigne par $H_0^1(\Omega; |x|^\alpha)$ la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme

$$||\zeta||_\alpha = \left(\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla\zeta|^2 dx\right)^{1/2} \qquad \forall \zeta \in C_c^\infty(\Omega).$$

Soit $H^{-1}(\Omega; |x|^\alpha)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega; |x|^\alpha)$ et soit E_+ le cône positif de $E = H^{-1}(\Omega; |x|^\alpha)$. On considère le problème

$$(1.3) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\alpha \nabla u) = |u|^{2_\alpha^* - 2}u + f & \text{dans } \Omega, \\ u \ge 0,\ u \not\equiv 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $2_\alpha^* = 2N/(N - 2 + \alpha)$ et $f \in H^{-1}(\Omega; |x|^\alpha)$. On observe que ce problème devient dégénéré si $0 \in \overline{\Omega}$ ou si Ω est non-borné.

On définit

$$s_\alpha^0(\Omega) = \lim_{r\to 0} S_\alpha(\Omega \cap B_r) \qquad s_\alpha^\infty(\Omega) = \lim_{r\to\infty} S_\alpha(\Omega \setminus B_r).$$

On dit que $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ satisfait la condition $\mathcal{C}$ si Ω est un cône de $\mathbf{R}^N$, ou $\Omega = \mathbf{R}^N$, ou

$$S_\alpha(\Omega) < \min\{s_\alpha^0(\Omega), s_\alpha^\infty(\Omega)\}.$$

On démontre le résultat suivant de multiplicité.

THÉORÈME 4 *Supposons que Ω satisfait la condition $\mathcal{C}$. Alors, pour chaque $g \in E_+$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour chaque $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, le problème (1.3) avec $f = \varepsilon g$ admet au moins deux solutions.*

1.4 Problèmes quasi-linéaire avec condition aux limites non linéaire

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un domaine non-borné avec frontière régulière Γ et soit n le vecteur unité de la normale extérieure sur Γ. On considère le problème aux limites

$$(A) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}\,(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda f(x)|u|^{p-2}u + g(x)|u|^{q-2}u & \text{dans } \Omega, \\ a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot n + b(x) \cdot |u|^{p-2}u = h(x,u) & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $p < q < p^* = \frac{Np}{N-p}$ si $p < N$ ($p^* = +\infty$ si $p \geq N$), $0 < a_0 \leq a \in L^\infty(\Omega)$ et $b : \Gamma \to \mathbf{R}$ est une fonction continue telle que

$$\frac{c}{(1+|x|)^{p-1}} \leq b(x) \leq \frac{C}{(1+|x|)^{p-1}},$$

où c et C sont des constantes positives.

Soit $h : \Gamma \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de Carathéodory telle que
(A1) $|h(x,s)| \leq h_0(x) + h_1(x)|s|^{m-1}$; $q \leq m < \frac{(N-1)p}{N-p}$ si $p < N$ ($q \leq m < +\infty$ si $p \geq N$),
où $h_i : \Gamma \to \mathbf{R}$ ($i = 0,1$) sont des fonctions mesurable qui satisfont $h_0 \in L^{m/(m-1)}(\Gamma;\, w_3^{1/(1-m)})$,

$$0 \leq h_i \leq C_h w_3 \qquad \text{p.p. dans } \Gamma,$$

où $C_h > 0$, avec $w(x) = (1+|x|)^\alpha$, $x \in \Gamma$ et $-N < \alpha < m \cdot \frac{N-p}{p} - N + 1$ si $p < N$ ($-N < \alpha < 0$ si $p \geq N$).

On suppose aussi que
(A2) $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{h(x,s)}{b(x)|s|^{p-1}} = 0$ uniformément en x
(A3) il existe $\mu \in (p,q]$ tel que

$$\mu H(x,s) \leq s h(x,s) \text{ p.p. } x \in \Gamma \text{ et pour chaque } s \in \mathbf{R}$$

(A4) il existe un ouvert $\emptyset \neq U \subset \Gamma$ tel que $H(x,s) > 0$ pour $(x,s) \in U \times (0,\infty)$, où $H(x,s) = \int_0^s h(x,t)\,dt$.

Soit $C_\delta^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ restreintes à Ω et soit E le complété de $C_\delta^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_E = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^p + \frac{1}{(1+|x|)^p}|u(x)|^p\right) dx\right)^{1/p}.$$

Soit

$$\tilde{\lambda} := \inf_{u \in E;\ u \neq 0} \left(\frac{\int\limits_{\Omega} a(x)|\nabla u|^p\,dx + \int\limits_{\Gamma} b(x)|u|^p\,d\Gamma}{\int\limits_{\Omega} f(x)|u|^p\,dx} \right).$$

On montre les résultats suivants

THÉORÈME 5 *Supposons que les conditions (A1)-(A4) soient satisfaites. Alors, pour chaque $\lambda < \tilde{\lambda}$, le problème (A) admet au moins une solution non-triviale.*

THÉORÈME 6 *Supposons $h(x,s) = 0$ et $q \geq 2$. Alors, pour chaque $\lambda < \tilde{\lambda}$, le problème (A) admet une infinité de solutions.*

On considère maintenant le problème non linéaire aux valeurs propres

$$(B) \qquad \left\{ \begin{array}{l} -\mathrm{div}\,(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda f(x)|u|^{p-2}u + g(x)|u|^{q-2}u],\ \text{ dans } \Omega \\ a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot n + b(x)|u|^{p-2}u = \lambda h(x,u),\ \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

On montre

THÉORÈME 7 *Supposons que les hypothèses (A1) et (A3) soient satisfaites. Soit d un réel tel que $1/d$ n'est pas une valeur propre λ pour le problème (B) et satisfaisant*

$$d > \frac{1}{\tilde{\lambda}}.$$

Alors il existe $\overline{\rho} > 0$ tel que pour chaque $r > \rho \geq \overline{\rho}$, le problème (B) admet une solution $(u,\lambda) = (u_d, \lambda_d) \in E \times \mathbf{R}$, telle que

$$\lambda_d \in \left[\frac{1}{d + r^2\, \|u_d\|_b^{m-p}}, \frac{1}{d + \rho^2\, \|u_d\|_b^{m-p}} \right].$$

1.5 Résultats d'existence et de non-existence pour un problème quasi-linéaire avec conditions aux limites non linéaires

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un domaine non-borné avec frontière régulière Γ et soit n le vecteur unité de la normale extérieure sur Γ. On considère le problème

$$(1_{\lambda,\theta}) \left\{ \begin{array}{l} -\mathrm{div}\,(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + h(x)u^{r-1} = f(\lambda, x, u) \quad \text{dans } \Omega, \\ a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot n + b(x) \cdot u^{p-1} = \theta g(x,u) \quad \text{sur } \Gamma, \\ u \geq 0,\ u \not\equiv 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

où

$$1 < p < N, \quad \max\{p, 2\} < r < p^\star := \frac{pN}{N-p}$$

$$a \in L^\infty(\Omega),\ a(x) \geq a_0 > 0 \qquad \text{p.p. } x \in \Omega$$

$$\frac{c}{(1+|x|)^{p-1}} \leq b(x) \leq \frac{C}{(1+|x|)^{p-1}}, \qquad \text{p.p. } x \in \Gamma, \text{ où } c,\, C > 0.$$

$$h : \Omega \to (0,\infty) \text{ est continue et } \int_\Omega \frac{w_1^{r/(r-q)}}{h^{q/(r-q)}}\,dx < \infty.$$

On suppose que $g : \Gamma \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction de Carathéodory telle que
(g1) $g(\cdot,0) = 0$, $g(x,s) + g(x,-s) \geq 0$ p.p. $x \in \Gamma$ et pour chaque $s \in \mathbf{R}$;
(g2) $|g(x,s)| \leq g_0(x) + g_1(x)|s|^{m-1}$; $p \leq m < p \cdot \frac{N-1}{N-p}$, où g_i sont non-négatives, mesurables et telles que

$$0 \leq g_i(x) \leq C_g(1+|x|)^{\alpha_2} \text{ p.p.}, \quad g_0 \in L^{m/(m-1)}(\Gamma;\, w_2^{1/(1-m)}),$$

où $-N < \alpha_2 < m \cdot \frac{N-p}{p} - N + 1$.

On suppose que $f(\lambda, x, s) : (0,\infty) \times \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction croissante en λ, mesurable en x, dérivable en s et qui satisfait
(f1) $f(\cdot,\cdot,0) = 0$, $\quad f(\lambda,x,s) + f(\lambda,x,-s) \geq 0 \quad \forall \lambda > 0$, p.p. $x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbf{R}$;
(f2) $|f_s(\lambda,x,s)| \leq \lambda \phi(x)|s|^{q-2}$ avec $r > q > \max\{p, 2\}$, $\forall \lambda > 0$, p.p. $x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbf{R}$, où $\phi \geq 0$ est une fonction mesurable telle que

$$0 \leq \phi(x) \leq c_f\, w_1(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega\,;$$

(f3) $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{f(\lambda,x,s)}{\lambda w_1(x)|s|^{q-2}s} = 1$ uniformément par rapport à x et λ;
(f4) $|f(\lambda_1,x,s) - f(\lambda_2,x,s)| \leq |\lambda_1 - \lambda_2|\psi(x)|s|^{q-1}$, $\quad \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0$, p.p. $x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbf{R}$, où $\psi \geq 0$ est une fonction mesurable telle que

$$0 \leq \psi(x) \leq C_f\, w_1(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega\,.$$

On démontre que, sous ces hypothèses, ont lieu les résultats suivants

THÉORÈME 8 *Il existe θ_*, θ^* et $\lambda^* > 0$ tels que le problème $(1_{\lambda,\theta})$ n'admet aucune solution si $\theta_* < \theta < \theta^*$ et $0 < \lambda < \lambda^*$.*

On définit maintenant

$$U = \{u \in X : \int_\Gamma G(x,u)\,d\Gamma < 0\}, \qquad V = \{u \in X : \int_\Gamma G(x,u)\,d\Gamma > 0\}$$

et

$$\theta_- = \sup_{u\in U} \frac{\|u\|_b^p}{p\int_\Gamma G(x,u)\,d\Gamma}, \qquad \theta^+ = \inf_{u\in V} \frac{\|u\|_b^p}{p\int_\Gamma G(x,u)\,d\Gamma}$$

Si $U = \emptyset$ (resp. $V = \emptyset$) alors $\theta_- = -\infty$ (resp. $\theta^+ = +\infty$).

On montre

THÉORÈME 9 *Soit $\underline{\theta} = \max\{\theta_*, \theta_-\}$, $\overline{\theta} = \min\{\theta^*, \theta^+\}$ et supposons que $J = (\underline{\theta}, \overline{\theta}) \neq \emptyset$. Alors il existe $\lambda_0 > 0$ tel que*

(i) le problème $(1_{\lambda,\theta})$ admet une solution si $\lambda \geq \lambda_0$ et $\theta \in J$;

(ii) le problème $(1_{\lambda,\theta})$ n'a aucune solution si $0 < \lambda < \lambda_0$ et $\theta \in J$.

2 Problèmes elliptiques singuliers: existence, unicité et explosion des solutions

2.1 Problèmes avec donnée au bord singulière

Soit Ω un ouvert regulier de $\mathbf{R}^N$, $\Omega \neq \mathbf{R}^N$. On considère le problème

$$
\begin{cases}
\Delta u = p(x)f(u) & \text{dans } \Omega\,, \\
u \geq 0,\ u \not\equiv 0 & \text{dans } \Omega\,, \\
u(x) \to \infty & \text{si dist}\,(x, \partial\Omega) \to 0.
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

Ce type de problème fait actuellement l'objet de nombreux travaux portant sur l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique des solutions au voisinage de la frontière. Les premiers résultats d'existence ont été obtenus par Keller [31] et Osserman [40]. Ils ont prouvé que si Ω est borné, $p \equiv 1$ et $f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, f croissante, $f(0) = 0$, alors une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions est

$$\int_1^\infty F^{-1/2}(t)\,dt < +\infty, \qquad \text{où } F'(t) = f(t).$$

Dans le cas particulier $p \equiv 1$ et $f(u) = u^{(N+2)/(N-2)}$, $N > 2$, qui apparaît dans de nombreux problèmes géométriques, Loewner et Nirenberg [32] ont étudié les questions d'unicité et de comportement asymptotique. Bandle et Marcus [2] ont étendu ces résultats à d'autres nonlinéarités, comme $f(u) = u^p$, $p > 1$.

On suppose que f satisfait

$(f1)$ $\quad f \in C^1[0,\infty),\ f' \geq 0,\ f(0) = 0$ et $f > 0$ sur $(0,\infty)$

ainsi que la condition de Keller-Osserman

$(f2)$ $$\int_1^\infty [F(t)]^{-1/2}\,dt < \infty\,, \quad \text{où} \quad F(t) = \int_0^t f(s)\,ds.$$

La fonction p est continue, non-négative et peut s'annuler dans des sous ensembles de Ω qui ne touchent pas la frontière de Ω. Si Ω est borné, on suppose que

$(p1)$ pour chaque $x_0 \in \Omega$ avec $p(x_0) = 0$, il existe $x_0 \ni \Omega_0 \subset\subset \Omega$ tel que $p > 0$ sur $\partial\Omega_0$.

Dans ce cas on montre

Théorème 10 *Supposons les hypothèses (f1), (f2) et (p1) soient satisfaites. Alors le problème (2.4) a au moins une solution.*

Si $\Omega = \mathbf{R}^N$ on démontre un résultat similaire, mais avec la condition (p1) remplacée par une condition adaptée au cas non-borné. Si $\Omega \neq \mathbf{R}^N$ est un ouvert non-borné, Marcus [33] a construit une solution de (2.4) qui tend vers zero à l'infini et qui, de plus, est la solution explosive **minimale** du problème (2.4). Nous montrons que si $\Omega = \mathbf{R}^N \setminus \overline{B(0,R)}$, alors le problème (2.4) admet deux types de solutions explosives, selon leur comportement à l'infini: la solution de Marcus et une autre solution U telle que $U(x) \to +\infty$ si $|x| \to \infty$. De plus, la solution U est **maximale** parmi toutes les solutions larges du problème (2.4).

2.2 Problèmes d'explosion pour l'équation logistique

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ $(N \geq 3)$ un ouvert borné régulier. On considère le problème

$$\Delta u + au = b(x)f(u) \qquad \text{dans} \ \ \Omega, \tag{2.5}$$

où a est un réel et $b \in C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$, $0 < \mu < 1$, tel que $b \geq 0$ et $b \not\equiv 0$ sur Ω. Soit

$$\Omega_0 = \operatorname{int}\{x \in \Omega : \ b(x) = 0\}$$

et on suppose que $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ et que $\partial\Omega_0$ satisfait la condition du cône extérieur. La non-linéarité $f \in C^1[0,\infty)$ satisfait

(A_1) $f \geq 0$ et $f(u)/u$ est croissante sur $(0,\infty)$.

(A_2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{F(t)}} < \infty\,,$ où $\displaystyle F(t) = \int_0^t f(s)\,ds.$

Soit $\lambda_{\infty,1}$ la première valeur propre de $(-\Delta)$ dans Ω_0. On considère $\lambda_{\infty,1} = +\infty$ si $\Omega_0 = \emptyset$.

Le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution explosive pour l'équation (2.5).

THÉORÈME 11 *Supposons que f satisfait les conditions (A_1) et (A_2). Alors le problème (2.5) admet une solution explosive positive si et seulement si $a \in (-\infty, \lambda_{\infty,1})$.*

On remarque que dans le résultat ci-dessus b peut s'annuler sur $\partial\Omega$ ou même $b \equiv 0$ sur $\partial\Omega$. On repond ainsi à une question posée par le Professeur Haim Brezis en mai 2001.

On considère maintenant le problème

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta u + au = b(x)f(u) & \text{dans} \ \ \Omega \setminus \overline{\Omega}_0\,, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sur} \ \ \partial\Omega\,, \\ u = +\infty & \text{sur} \ \ \partial\Omega_0\,, \end{array}\right. \tag{2.6}$$

où $b > 0$ sur $\partial\Omega$ et $\mathcal{B}$ signifie une condition de Dirichlet, de Neumann ou de Robin.

On démontre que le problème (2.6) admet des solutions maximales, pour n'importe quel valeur de a. Plus précisèment, on a

THÉORÈME 12 *Pour chaque $a \in \mathbf{R}$, le problème (2.6) admet une solution maximale et une solution minimale.*

On montre aussi que, sous des hypothèses supplémentaires, le problème (2.6) admet une solution unique.

Parmi les non-linéarités qui satisfont les hypothèses de nos résultats on cite

(i) $f(u) = u^p$, $p > 1$; (ii) $f(u) = u^p \ln(u+1)$, $p > 1$; (iii) $f(u) = u^p \arctan u$, $p > 1$.

2.3 Solutions explosives à l'infini pour les systèmes elliptiques

On considère le système

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta u = p(x)g(v) & \text{dans} \ \ \mathbf{R}^N, \\ \Delta v = q(x)f(u) & \text{dans} \ \ \mathbf{R}^N, \end{array}\right. \tag{2.7}$$

où $p, q \in C^{0,\alpha}_{\rm loc}(\mathbf{R}^N)$ $(0 < \alpha < 1)$ sont des fonctions non-négatives et à symétrie radiale. On suppose que $f, g \in C^{0,\beta}_{\rm loc}[0,\infty)$ $(0 < \beta < 1)$ sont des fonctions non-négatives et croissantes.

Soit

$$\mathcal{G} = \{(a,b) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+;\ (\exists) \text{ solution radiale de (2.7) telle que } (u(0), v(0)) = (a,b)\}.$$

On montre

THÉORÈME 13 *Supposons que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(cf(t))}{t} = 0 \qquad \forall\, c > 0.$$

Alors $\mathcal{G} = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$.

De plus,
i) Si

$$\int_0^\infty tp(t)\,dt = \int_0^\infty tq(t)\,dt = +\infty,$$

alors toute solution radiale positive de (2.7) explose à l'infini.
ii) Si

$$\int_0^\infty tp(t)\,dt < \infty, \qquad \int_0^\infty tq(t)\,dt < \infty$$

alors toute solution radiale positive de (2.7) est bornée. Si $(\tilde{u}, \tilde{v})$ *sont deux solutions radiales positives de (2.7), alors il existe une constante* C *telle que, pour chaque* $r \in [0, \infty)$,

$$\max\{|u(r) - \tilde{u}(r)|, |v(r) - \tilde{v}(r)|\} \le C \max\{|u(0) - \tilde{u}(0)|, |v(0) - \tilde{v}(0)|\}.$$

Supposons maintenant que $f, g \in C^1[0,\infty)$ satisfont

$(\mathbf{H_1})$ $\quad f(0) = g(0) = 0,\ \liminf_{u\to\infty} \frac{f(u)}{g(u)} =: \sigma > 0$

ainsi que la condition de Keller-Osserman

$(\mathbf{H_2})$ $\quad \displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{G(t)}} < \infty,$ où $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)\,ds.$

Dans ce cas on montre

THÉORÈME 14 *Soient* $f, g \in C^1[0,\infty)$ *qui satisfont* $(\mathbf{H_1})$ *et* $(\mathbf{H_2})$. *Si*

$$\int_0^\infty tp(t)\,dt < \infty, \qquad \int_0^\infty tq(t)\,dt < \infty,$$

alors toute solution radiale (u, v) *de (2.7) avec* $(u(0), v(0)) \in F(\mathcal{G})$ *est une solution explosive à l'infini.*

2.4 Unicité de la solution explosant au bord pour équations logistiques avec absorption

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ $(N \geq 3)$ un domaine borné et régulier, a un paramètre réel et $b \in C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$, $\mu \in (0,1)$, $b \geq 0$, $b \not\equiv 0$ dans Ω. On considère l'équation logistique

$$\Delta u + au = b(x) f(u) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{2.8}$$

où $f \in C^1[0,\infty)$ satisfait

(A_1) $f \geq 0$ et $f(u)/u$ est strictement croissante sur $(0,+\infty)$.

Soit

$$\Omega_0 := \operatorname{int}\{x \in \Omega : \ b(x) = 0\}$$

et on suppose que $\partial\Omega_0$ est régulier (éventuellement vide), $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ et $b > 0$ sur $\Omega \setminus \overline{\Omega}_0$. On désigne par $\lambda_{\infty,1}$ la première valeur propre (avec conditions de Dirichlet) de l'opérateur $(-\Delta)$ dans Ω_0, avec la convention $\lambda_{\infty,1} = +\infty$ si $\Omega_0 = \emptyset$.

On dit que u est une solution *large (explosive)* de (2.8) si $u \geq 0$ dans Ω et $u(x) \to \infty$ si $d(x) := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \to 0$.

Soit $D > 0$ et $R : [D,\infty) \to (0,+\infty)$ une fonction mesurable. On dit que R a une variation régulière d'indice $\rho \in \mathbf{R}$ (notation: $R \in \mathbf{R}_\rho$) si $\lim_{u\to\infty} R(\xi u)/R(u) = \xi^\rho$, pour chaque $\xi > 0$.

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions $k : (0,\nu) \to (0,+\infty)$ (pour un certain ν), de classe C^1, croissantes, telles que $\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{\int_0^t k(s)\,ds}{k(t)}\right)^{(i)} := \ell_i$, pour $i = \overline{0,1}$.

On démontre le résultat suivant.

Théorème 15 *Supposons que la fonction f satisfait la condition (A_1) et que f' est une fonction à variation régulière d'indice $\rho \neq 0$. De plus, on suppose que le potentiel b vérifie*

(B) $b(x) = c\,k^2(d(x)) + o(k^2(d(x)))$ si $d(x) \to 0$, avec $c > 0$ et $k \in \mathcal{K}$.

Alors, pour chaque $a \in (-\infty, \lambda_{\infty,1})$, l'équation (2.8) admet une unique solution explosive u_a. On a, de plus,

$$\lim_{d(x)\to 0} \frac{u_a(x)}{h(d(x))} = \xi_0,$$

où $\xi_0 = \left(\frac{2+\ell_1\rho}{c(2+\rho)}\right)^{1/\rho}$ et la fonction h est définie par

$$\int_{h(t)}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{2F(s)}} = \int_0^t k(s)\,ds, \quad \forall t \in (0,\nu).$$

2.5 Comportement asymptotique de la solution explosant au bord pour l'équation logistique avec absorption

On continue l'étude du problème logistique

$$\Delta u + au = b(x)f(u) \ \text{ dans } \Omega, \qquad u(x) \to +\infty \ \text{ si } d(x) := \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \to 0, \tag{2.9}$$

sous les hypothèses de la section précédente.

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions $k : (0,\nu) \to (0,\infty)$ (pour un certain ν), de classe C^1, croissantes, telles que $\lim_{t\searrow 0}(\int_0^t k(s)\,ds/k(t))^{(i)} := \ell_i$, pour $i = \overline{0,1}$.

Soit RV_q ($q \in \mathbf{R}$) l'ensemble des fonctions positives et mesurables $Z : [A,\infty) \to \mathbf{R}$ (avec $A > 0$) telles que $\lim_{u\to\infty} Z(\xi u)/Z(u) = \xi^q$, $\forall \xi > 0$. On désigne par NRV_q la classe des fonctions f définies par $f(u) = Cu^q \exp\{\int_B^u \phi(t)/t\,dt\}$, $\forall u \geq B > 0$, où $C > 0$ et $\phi \in C[B,\infty)$ satisfait $\lim_{t\to\infty}\phi(t) = 0$. Supposons que $0 \leq f \in C^1[0,\infty) \cap NRV_{\rho+1}$ ($\rho > 0$) est telle que $f(u)/u$ soit strictement croissante sur $(0,\infty)$ et que $b \equiv 0$ sur $\partial\Omega$ vérifie $b(x) = k^2(d)(1+o(1))$ si $d(x) \to 0$, avec $k \in \mathcal{K}$. Alors, pour chaque $a < \lambda_{\infty,1}$, le problème (1) admet une unique solution positive u_a (voir Théorème 15).

Pour chaque $\zeta > 0$, soit

$$\mathcal{R}_{0,\zeta} = \left\{ \begin{array}{ll} k: & k(u^{-1}) = d_0 u\,[\Lambda(u)]^{-1} \exp\left[-\int_{d_1}^u (s\Lambda(s))^{-1}\,ds\right] \ (u \geq d_1),\ 0 < \Lambda \in C^1[d_1,\infty), \\ & \lim_{u\to\infty}\Lambda(u) = \lim_{u\to\infty} u\Lambda'(u) = 0,\ \lim_{u\to\infty} u^{\zeta+1}\Lambda'(u) = \ell_\star \in \mathbf{R},\ d_0,\ d_1 > 0 \end{array} \right\}.$$

On a $\mathcal{R}_{0,\zeta} \subset \mathcal{K}$. De plus, si $k \in \mathcal{R}_{0,\zeta}$ alors $\ell_1 = 0$ et $\lim_{t\to 0} k(t) = 0$.

On définit les classes $\mathcal{F}_{\rho\eta} = \{f \in NRV_{\rho+1}(\rho > 0) :\ \phi \in RV_\eta \text{ ou } -\phi \in RV_\eta\}$, si $\eta \in (-\rho-2, 0]$ et $\mathcal{F}_{\rho 0,\tau} = \{f \in \mathcal{F}_{\rho 0} :\ \lim_{u\to\infty}(\ln u)^\tau \phi(u) = \ell^\star \in \mathbf{R}\}$, pour $\tau \in (0,\infty)$.

On démontre le résultat suivant.

THÉORÈME 16 *On suppose que $b(x) = k^2(d)(1 + \tilde{c}d^\theta + o(d^\theta))$ si $d(x) \to 0$ (avec $\theta > 0$, $\tilde{c} \in \mathbf{R}$), où $k \in \mathcal{R}_{0,\zeta}$. Soit $0 \leq f \in C^1[0,\infty)$ telle que $f(u)/u$ soit strictement croissante sur $(0,\infty)$. De plus, on suppose que f satisfait l'un des cas suivants de croissance à l'infini:*

(i) $f(u) = Cu^{\rho+1}$ *dans un voisinage de l'infini;*

(ii) $f \in \mathcal{F}_{\rho\eta}$ *avec* $\eta \neq 0$*;*

(iii) $f \in \mathcal{F}_{\rho 0,\tau_1}$ *avec* $\tau_1 = \varpi/\zeta$, *où* $\varpi = \min\{\theta,\zeta\}$.

Alors, pour chaque $a \in (-\infty, \lambda_{\infty,1})$, l'unique solution positive u_a du problème (2.9) satisfait

$$u_a(x) = \xi_0 h(d)(1 + \chi d^\varpi + o(d^\varpi)) \quad \text{si } d(x) \to 0,$$

où $\xi_0 = [2(2+\rho)^{-1}]^{1/\rho}$ et h est définie par $\int_{h(t)}^\infty [2F(s)]^{-1/2} ds = \int_0^t k(s)ds$, pour $t > 0$ suffisement petit. L'expression de χ est donnée par

$$\chi = \left\{ \begin{array}{l} -(1+\zeta)\ell_\star(2\zeta)^{-1}\text{Heaviside}(\theta-\zeta) - \tilde{c}\rho^{-1}\text{Heaviside}(\zeta-\theta) = \chi_1, \ \textit{pour (i) et (ii)} \\ \chi_1 - \ell^\star\rho^{-1}\left(-\rho\ell_\star/2\right)^{\tau_1}\left(1/(\rho+2) + \ln\xi_0\right), \ \textit{pour le cas (iii)}. \end{array} \right.$$

2.6 Problèmes elliptiques singuliers anisotropes

On considère le problème

$$(2.10) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} f_i(u)\, u_{x_i x_i} + u_{yy} + p(x)\, g(u) = 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{array} \right.$$

où $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ est un ouvert borné régulier et p est une fonction continue positive sur $\overline{\Omega}$.

On suppose que

$(\mathbf{H}_1)$ $f_i, g : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $i = \overline{1, N-1}$ sont de classe C^1;

$(\mathbf{H}_2)$ f_i, $i = \overline{1, N-1}$ est croissante sur $(0,\infty)$ et g est décroissante sur $(0,\infty)$.

Soit

$$D = \{y \in [0,\ell] : \ \exists x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}) \text{ tel que } \ (x', y) \in \overline{\Omega}\}.$$

Soit ψ l'unique fonction positive définie par

$$\int_0^{\psi(y)} \frac{1}{g(t)}\, dt = \frac{\beta}{2}(\ell y - y^2), \quad \text{pour chaque } \ y \in [0, \ell].$$

Alors

$$\max_{y \in D} \psi(y) \leq \max_{y \in [0,\ell]} \psi(y) =: A,$$

où $A > 0$ est défini implicitement par

$$\int_0^{A} \frac{1}{g(t)}\, dt = \frac{\beta}{8}\ell^2.$$

On impose aussi

$(\mathbf{H}_3)$ $f_1' > 0$ sur $(0, A]$.

$(\mathbf{C}_1)$ il existe $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{f_1 f_i'}{f_1'}(x) \in \mathbf{R}$, pour chaque $i = \overline{2, N-1}$.

Pour $x \in \Omega$ on définit les ensembles

$$P_x = \{2 \leq i \leq N-1;\ u_{x_i x_i}(x) \geq 0\} \quad \text{et} \quad N_x = \{2 \leq i \leq N-1;\ u_{x_i x_i}(x) < 0\}.$$

Notre premier résultat donne une condition suffisante pour l'unicité de la solution, si on savait qu'au moins une solution existerait.

Théorème 17 *Supposons que les hypothèses* $(\mathbf{H}_1)$-$(\mathbf{H}_3)$ *et* $(\mathbf{C}_1)$ *soient satisfaites. Alors il existe* $K_1 = K_1(f_1, g, p, \Omega)$ *tel que si* u *est une solution positive de (2.10) qui satisfait*

$$\sum_{i \in P_x} m_i u_{x_i x_i} + \sum_{i \in N_x} M_i u_{x_i x_i} + u_{yy} > -K_1 \quad \text{sur } \Omega$$

alors u *est l'unique solution de (2.10).*

Dans la suite on impose la condition

$(\mathbf{C}_2)$ $\dfrac{f_i}{f_1}$, $i = \overline{2, N-1}$ est décroissante sur $(0,\infty)$.

Dans ce cas on montre

Théorème 18 *Supposons que les hypothèses* $(\mathbf{H}_1)$-$(\mathbf{H}_3)$ *et* $(\mathbf{C}_2)$ *soient satisfaites. Alors il existe* $K_2 = K_2(f_1, g, p, \Omega)$ *tel que si* u *est une solution positive de (2.10) qui, de plus, satisfait*

$$u_{x_1 x_1} + \sum_{i \in P_x} \frac{f_i(u)}{f_1(u)} u_{x_i x_i} + \sum_{i \in N_x} \left(\inf_{(0,A)} \frac{f_i'}{f_1'} \right) u_{x_i x_i} < K_2 \quad \text{sur } \Omega$$

alors u *est l'unique solution de (2.10).*

3 Problèmes elliptiques non lisses: théories de Clarke et de Degiovanni

3.1 Un résultat de multiplicité pour des fonctionnelles localement Lipschitz périodiques

Soit X un espace de Banach réel et $f : X \to \mathbf{R}$ une application localement Lipschitz. Soit

$$\partial f(u) = \{x^* \in X^*;\ \ f^0(u;v) \geq \ \langle x^*, v\rangle,\ \text{pour tout } v \in X\}$$

le gradient de Clarke au point $u \in X$, où

$$f^0(u;v) = \limsup_{\substack{w\to u \\ \lambda\searrow 0}} \frac{f(w+\lambda v) - f(w)}{\lambda}, \qquad v \in X\,.$$

Le point $u \in X$ est un point critique de f si $0 \in \partial f(u)$, c'est-à-dire $f^0(u;v) \geq 0$, pour chaque $v \in X$.

Soit Z un sous-groupe discret de X, donc $\inf_{z\in Z\setminus\{0\}} \|z\| > 0$.

Une fonction $f : X \to \mathbf{R}$ est *Z-périodique* si $f(x+z) = f(x)$, pour chaque $x \in X$ et $z \in Z$.

Si $\pi : X \to X/Z$ est la surjection canonique est si x est un point critique de f, alors l'ensemble $\pi^{-1}(\pi(x))$ ne contient que de points critiques de f. L'ensemble $\pi^{-1}(\pi(x))$ s'appelle *orbite critique* de f.

On dit qu'une application localement lipschitzienne Z-périodique $f : X \to \mathbf{R}$ satisfait la condition de Palais-Smale $(PS)_Z$ si, pour chaque suite (u_n) de X telle que $(f(u_n))$ est bornée et $\min_{x^*\in\partial f(u_n)} ||x^*|| \to 0$, la suite $(\pi(u_n))$ est relativement compacte dans X/Z.

Notre résultat abstrait est

THÉORÈME 19 *Soit $f : X \to \mathbf{R}$ une application localement Lipschitz, Z-périodique, bornée inférieurement et qui satisfait la condition de Palais-Smale $(PS)_Z$.*

Alors f a au moins $n+1$ orbites critiques distinctes, où n est la dimension de l'espace vectoriel engendré par Z.

Comme application de ce théorème on résout le problème multivoque du pendule forcé

$$\left\{\begin{array}{ll} x''(t) + f(t) \in [\underline{g}(x(t)), \overline{g}(x(t))] & \text{p.p. } t \in (0,1) \\ x(0) = x(1)\,, & \end{array}\right. \tag{3.11}$$

où

$$f \in L^p(0,1) \quad \text{pour} \ \ p > 1 \tag{3.12}$$

$$g \in L^\infty(\mathbf{R}),\ g(u+T) = g(u) \quad \text{où} \ \ T > 0,\ p.p. \ \ u \in \mathbf{R} \tag{3.13}$$

$$\int_0^T g(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = 0\,. \tag{3.14}$$

On a noté

$$\underline{g}(u) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \text{essinf}\{g(u);\ |u-v| < \varepsilon\} \quad \overline{g}(u) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \text{esssup}\{g(u);\ |u-v| < \varepsilon\}\,.$$

Notre résultat d'existence est

THÉORÈME 20 *Supposons que les hypothèses (3.12)-(3.14) soient satisfaites. Alors le problème (3.11) a au moins deux solutions distinctes dans l'espace*

$$X := H^1_p(0,1) = \{x \in H^1(0,1);\ \ x(0) = x(1)\}\,.$$

3.2 Deux approches parallèles d'un problème non linéaire dans $\mathbf{R}^N$

En appliquant le théorème du col, Rabinowitz [42] a étudié le problème sans compacité

$$-\Delta u + b(x)u = f(x,u) \qquad \text{dans } \mathbf{R}^n\,,$$

où f est une fonction régulière, sous-critique et super-linéaire et $b \geq b_0 > 0$ dans $\mathbf{R}^n$. Notre but est de présenter deux variantes non lisses de ce problèmes, en utilisant les théories de point critique de Degiovanni et de Clarke.

Soit E l'espace de Hilbert des fonctions $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ telles que $\|u\|^2_E := \int_{\mathbf{R}^n}(|Du|^2 + b(x)u^2) < \infty$. On suppose d'abord que l'opérateur linéaire $(-\Delta)$ est remplacé par un opérateur quasi-linéaire et on cherche les solutions faibles positives $u \in E$ du problème

$$(3.15)\quad -\sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x,u)D_iu) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial s}(x,u)D_iuD_ju + b(x)u = f(x,u) \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

On impose les conditions suivantes

$$(3.16)\qquad \begin{cases} a_{ij} \equiv a_{ji} \\ a_{ij}(x,\cdot) \in C^1(\mathbf{R}) \quad \text{p.p. } x \in \mathbf{R}^n \\ a_{ij}(x,u)s,\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial s}(x,u)s \in L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})\ ; \end{cases}$$

$$(3.17)\ \exists \nu > 0 \quad \text{tel que} \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,u)s\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \quad \text{p.p. } x \in \mathbf{R}^n,\ \forall s \in \mathbf{R},\ \forall \xi \in \mathbf{R}^n$$

$$(3.18)\begin{cases} \exists \mu \in (2,2^*)\ , \quad \gamma \in (0,\mu-2) \quad \text{tel que} \\ 0 \leq s\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial s}(x,u)s\xi_i\xi_j \leq \gamma\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,s)\xi_i\xi_j \quad \text{p.p. } x \in \mathbf{R}^n,\ \forall (s,\xi) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\,. \end{cases}$$

Soit $b \in L^\infty_{\rm loc}(\mathbf{R}^n)$ satisfaisant

$$(3.19)\qquad \begin{cases} \exists \underline{b} > 0 \quad \text{tel que} \quad b(x) \geq \underline{b} \quad \text{p.p. } x \in \mathbf{R}^n \\ \text{ess}\lim\limits_{|x|\to\infty} b(x) = +\infty\ . \end{cases}$$

On suppose que $f(x,s) \not\equiv 0$ et

$$(3.20)\qquad \begin{cases} f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ est une fonction de Carathéodory} \\ f(x,0) = 0 \qquad \text{p.p. } x \in \mathbf{R}^n \\ 0 \leq \mu F(x,s) \leq sf(x,s) \qquad \forall s \geq 0 \text{ p.p. } x \in \mathbf{R}^n\,. \end{cases}$$

La fonction f a une croissance sous-critique, exprimée par la condition

$$(3.21)\qquad \begin{cases} \forall\varepsilon>0 \quad \exists f_\varepsilon\in L^{\frac{2n}{n+2}}(\mathbf{R}^n) \text{ tel que} \\ |f(x,s)|\le f_\varepsilon(x)+\varepsilon|s|^{\frac{n+2}{n-2}} \qquad \forall s\in\mathbf{R} \text{ et p.p. } x\in\mathbf{R}^n\ . \end{cases}$$

Pour chaque $\delta\in(2,2^*)$ on définit $q(\delta)=\frac{2n}{2n+(2-n)\delta}$ et on suppose que

$$(3.22)\qquad \begin{cases} \exists C\ge 0\ ,\quad \exists\delta\in(2,2^*)\ ,\quad \exists G\in L^{q(\delta)}(\mathbf{R}^n) \quad \text{tel que} \\ F(x,s)\le G(x)|s|^\delta+C|s|^{2^*} \qquad \forall s\in\mathbf{R},\ \text{p.p. } x\in\mathbf{R}^n\ . \end{cases}$$

On peut considérer aussi le cas $\delta=2$ mais dans cette situation il faut supposer que $\|G\|_{n/2}$ est assez petit.

Notre résultat est

Théorème 21 *Supposons que les conditions (3.16)-(3.22) soient satisfaites. Alors le problème (3.15) admet au moins une solution positive dans E.*

On considère ensuite le problème multivoque

$$(3.23)\qquad -\Delta u+b(x)u\in[\underline{f}(x,u),\overline{f}(x,u)] \qquad \text{dans } \mathbf{R}^n\,,$$

où

$$\underline{f}(x,s)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\ \text{essinf}\ \{f(x,t);\ |t-s|<\varepsilon\} \qquad \overline{f}(x,s)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\ \text{esssup}\ \{f(x,t);\ |t-s|<\varepsilon\}\,.$$

On suppose que $f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ est une fonction mesurable telle que

$$(3.24)\qquad |f(x,s)|\le C(|s|+|s|^p) \quad \text{p.p. } (x,s)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\ ,$$

où $C>0$ et $1<p\le\frac{n+2}{n-2}$. On ne suppose pas que $f(x,\cdot)$ est continue, mais si on définit $F(x,s)=\int_0^s f(x,t)dt$, on observe que F est une fonction de Carathéodory qui est localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable. On observe aussi que $\Psi(u)=\int_{\mathbf{R}^n}F(x,u)$ est localement Lipschitz sur E.

On impose aussi les conditions

$$(3.25)\qquad \lim_{\varepsilon\searrow 0}\ \text{esssup}\left\{\left|\frac{f(x,s)}{s}\right|;\ (x,s)\in\mathbf{R}^n\times(-\varepsilon,\varepsilon)\right\}=0$$

et il existe $\mu>2$ tel que

$$(3.26)\qquad 0\le\mu F(x,s)\le s\underline{f}(x,s) \quad \text{p.p. } (x,s)\in\mathbf{R}^n\times[0,+\infty)\ .$$

Notre résultat dans ce cas est

Théorème 22 *Supposons que les conditions (3.19), (3.24)-(3.26) soient satisfaites. Alors le problème (3.23) a au moins une solution positive dans E.*

3.3 Perturbations d'un problème non linéaire aux valeurs propres symétrique

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un ouvert borné. Pour $r > 0$ fixé arbitrairement on considère le problème suivant: trouver $(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ tel que

$$
\left\{
\begin{array}{l}
f(x,u) \in L^1_{loc}(\Omega)\,, \\
-\Delta u = \lambda f(x,u) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,, \\
\displaystyle\int_\Omega |Du|^2 dx = r^2\,.
\end{array}
\right.
\tag{3.27}
$$

On suppose que $f : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction de Carathéodory avec les propriétés suivantes:

$(f1)$ $f(x,-s) = -f(x,s)$, p.p. sur Ω et pour chaque $s \in \mathbf{R}$;

$(f2)$ il existe $a \in L^1(\Omega)$, $b \in \mathbf{R}$ et $0 \leq p < \frac{2N}{N-2}$ (si $N > 2$) tels que

$$0 < sf(x,s) \leq a(x) + b|s|^p\,, \qquad F(x,s) \leq a(x) + b|s|^p\,,$$

p.p. sur Ω et pour chaque $s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, où $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$;

$(f3)$ $\sup\limits_{|s|\leq t} |f(x,s)| \in L^1_{loc}(\Omega)$, pour chaque $t > 0$.

Théorème 23 *Supposons que les conditions $(f1) - (f3)$ soient satisfaites. Alors le problème (3.27) admet une suite $(\pm u_n, \lambda_n)$ de solutions distinctes.*

Ensuite notre objectif est d'analyser le problème perturbé

$$
\left\{
\begin{array}{l}
f(x,u),\ g(x,u) \in L^1_{loc}(\Omega)\,, \\
-\Delta u = \lambda\,(f(x,u) + g(x,u)) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,, \\
\displaystyle\int_\Omega |Du|^2 dx = r^2\,,
\end{array}
\right.
\tag{3.28}
$$

où $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction de Carathéodory qui n'est pas nécessairement impaire par rapport à la seconde variable. On suppose quand même que g satisfait

$(g1)$ $0 < sg(x,s) \leq a(x) + b|s|^p$ p.p. sur Ω et pour chaque $s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

$(g2)$ $\sup\limits_{|s|\leq t} |g(x,s)| \in L^1_{loc}(\Omega)$, pour chaque $t > 0$;

$(g3)$ $G(x,s) \leq C_g\,(1 + |s|^p)$, p.p. sur Ω et pour chaque $s \in \mathbf{R}$, avec $C_g > 0$, où $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)dt$.

On démontre que le nombre de solutions du problème perturbé (3.28) devient de plus en plus grand si la perturbation est assez petite, dans un sens précisé ultérieurement. Plus précisement, on a

Théorème 24 *Supposons que les conditions $(f1) - (f3)$ et $(g1) - (g3)$ soient satisfaites. Alors, pour chaque entier $n \geq 1$, il existe $\varepsilon_n > 0$ tel que le problème (3.28) admet au moins n solutions distinctes si g est une fonction telle que la condition $(g3)$ soit satisfaite pour $C_g = \varepsilon_n$.*

3.4 Résultats de multiplicité pour une classe d'inégalités hemivariationnelles

Soit $n \geq 2$ et Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbf{R}^n$. Soit $\Psi : \mathbf{R}^{nN} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe et paire telle que $\Psi(0) = 0$, $\Psi(\xi) > 0$ pour $\xi \neq 0$. On suppose aussi qu'il existe $c > 0$ tel que $\Psi(\xi) \leq c|\xi|$, pour chaque $\xi \in \mathbf{R}^{nN}$.

Soit $G : \Omega \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ une application qui vérifie les conditions

(G_1) $G(\cdot, s)$ est mesurable, pour chaque $s \in \mathbf{R}^N$;

(G_2) pour chaque $t > 0$, il existe $\alpha_t \in L^1(\Omega)$ tel que

$$|G(x, s_1) - G(x, s_2)| \leq \alpha_t(x)|s_1 - s_2|$$

pour p.p. $x \in \Omega$ et chaque $s_1, s_2 \in \mathbf{R}^N$ avec $|s_j| \leq t$;

(G_3) il existe $a \in L^1(\Omega)$ et $b \in \mathbf{R}$ tels que

$$|G(x, s)| \leq a(x) + b|s|^p \qquad \text{pour p.p. } x \in \Omega \text{ et chaque } s \in \mathbf{R}^N\,;$$

(G_4) pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $a_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ telle que

$$G^\circ(x, s; -s) \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon|s|^{n/(n-1)} \qquad \text{pour p.p. } x \in \Omega \text{ et chaque } s \in \mathbf{R}^N\,.$$

On suppose aussi que la fonction G satisfait les conditions

$$\text{(3.29)} \qquad \begin{cases} \text{il existe } \tilde{a} \in L^1(\Omega) \text{ et } \tilde{b} \in L^n(\Omega) \text{ tels que} \\ G(x, s) \geq -\tilde{a}(x) - \tilde{b}(x)|s| \qquad \text{pour p.p. } x \in \Omega \text{ et chaque } s \in \mathbf{R}^N\,; \end{cases}$$

$$\text{(3.30)} \qquad \lim_{|s| \to \infty} \frac{G(x, s)}{|s|} = +\infty \qquad \text{pour p.p. } x \in \Omega\,;$$

$$\text{(3.31)} \qquad \{s \longmapsto G(x, s)\} \text{ est paire pour p.p. } x \in \Omega\,.$$

Soit $\mathcal{E} : L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega; \mathbf{R}^N) \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\mathcal{E}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Psi(Du^a)\, dx + \int_\Omega \Psi^\infty \left(\frac{Du^s}{|Du^s|} \right) d|Du^s|(x) + \\ \displaystyle + \int_{\partial\Omega} \Psi^\infty(u \otimes \nu)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) & \text{si } u \in BV(\Omega; \mathbf{R}^N), \\ +\infty & \text{si } u \in L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega; \mathbf{R}^N) \setminus BV(\Omega; \mathbf{R}^N), \end{cases}$$

où $Du = Du^a\, dx + Du^s$ est la décomposition de Lebesgue de Du, $|Du^s|$ est la variation totale de Du^s, $Du^s/|Du^s|$ est la dérivée de Radon-Nikodym de Du^s par rapport à $|Du^s|$, Ψ^∞ est la fonctionnelle de récession associée à Ψ, ν est la normale extérieure sur $\partial\Omega$ et la trace de u sur $\partial\Omega$ est encore designée par u (voir [1]).

Le théorème suivant est un résultat de multiplicité du type Clark [21].

THÉORÈME 25 *Pour chaque entier $k \geq 1$ il existe Λ_k tel que si $\lambda \geq \Lambda_k$, le problème*

$$\begin{cases} u \in BV(\Omega; \mathbf{R}^N) \\ \mathcal{E}(v) - \mathcal{E}(u) + \int_\Omega G^\circ(x, u; v-u)\, dx \geq \lambda \int_\Omega \frac{u}{\sqrt{1+|u|^2}} \cdot (v-u)\, dx \quad \forall v \in BV(\Omega; \mathbf{R}^N) \end{cases}$$

admet au moins k paires $(u, -u)$ de solutions distinctes.

On impose maintenant la condition technique suplémentaire

$$(3.32) \quad \begin{cases} \text{il existe } q > 1 \text{ et } R > 0 \text{ tels que} \\ G^\circ(x, s; s) \leq qG(x, s) < 0 \ \text{ p.p. } x \in \Omega \text{ et chaque } s \in \mathbf{R}^N \text{ avec } |s| \geq R. \end{cases}$$

On définit la fonctionnelle paire et semicontinue inférieurement $f : L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega; \mathbf{R}^N) \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ par

$$f(u) = \mathcal{E}(u) + \int_\Omega G(x, u)\, dx\,.$$

Sous ces hypothèses on montre

THÉORÈME 26 *Il existe une suite (u_h) de solutions du problème*

$$\begin{cases} u \in BV(\Omega; \mathbf{R}^N) \\ \mathcal{E}(v) - \mathcal{E}(u) + \int_\Omega G^\circ(x, u; v-u)\, dx \geq 0 \quad \forall v \in BV(\Omega; \mathbf{R}^N) \end{cases}$$

telle que $f(u_h) \to +\infty$.

3.5 Un problème non linéaire qui modélise l'initiation des tremblements de terre

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ un domaine régulier tel que sa frontière se décompose en deux parties: la frontière extérieure $\Gamma_d = \partial\Omega$ et une partie interne Γ composée d'un nombre fini d'arcs bornés. Soit

$$V = \{v \in H^1(\Omega);\ v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_d\}$$

et soit $\gamma : V \to L^2(\Gamma)$ l'opérateur de trace. On définit le cône convexe fermé

$$K = \{v \in V;\ [v] \geq 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

où $[\,\cdot\,]$ signifie le saut à travers Γ. Soit β une constante positive et $j(t) = -\beta t^2/2$, $t \in \mathbf{R}$. Pour $r > 0$ fixé on définit

$$M = \left\{u \in V;\ \int_\Omega u^2 dx = r^2\right\}.$$

On étudie le problème suivant de valeurs propres:

$$(3.33) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in K \cap M \text{ et } \lambda^2 \in \mathbf{R} \text{ tels que} \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u) dx + \int_\Gamma j'\left(\gamma(u(x)); \gamma(v(x)) - \gamma(u(x))\right) d\sigma + \\ \lambda^2 \int_\Omega u(v-u) dx \geq 0, \quad \forall v \in K. \end{cases}$$

On montre le résultat suivant de multiplicité:

THÉORÈME 27 *Le problème (3.33) admet une infinité de solutions* (u, λ^2) *et l'ensemble de valeurs propres* $\{\lambda^2\}$ *satisfait* $\lambda_0^2 := \sup \lambda^2 < +\infty$ *et* $\inf \lambda^2 = -\infty$. *De plus, il existe une solution* (u_0, λ_0^2) *du problème (3.33). L'application* $\beta \longmapsto \lambda_0^2(\beta)$ *est convexe et*

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \lambda_0^2(\beta) \int_\Omega v^2 \, dx \geq \beta \int_\Gamma [v]^2 \, d\sigma, \qquad \forall v \in K.$$

On étudie ensuite l'effet d'une perturbation arbitraire dans le problème (3.33). Plus précisèment, si ε est un réel, on considère le problème

$$(3.34) \quad \begin{cases} \text{trouver } u_\varepsilon \in K \text{ et } \lambda_\varepsilon^2 \in \mathbf{R} \text{ tels que} \\ \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (v - u_\varepsilon) dx + \int_\Gamma (j' + \varepsilon g') \left(\gamma(u_\varepsilon(x)); \gamma(v(x)) - \gamma(u_\varepsilon(x))\right) d\sigma + \\ \lambda_\varepsilon^2 \int_\Omega u_\varepsilon (v - u_\varepsilon) dx \geq 0, \quad \forall v \in K, \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une function continue arbitraire telle que

$$\begin{aligned} &\exists\, a > 0,\ \exists\, 2 \leq p \leq \frac{2(N-1)}{N-2} \text{ tels que } |g(t)| \leq a(1 + |t|^p) \quad , \text{ si } N \geq 3; \\ &\exists\, a > 0,\ \exists\, 2 \leq p < +\infty \text{ tels que } |g(t)| \leq a(1 + |t|^p) \quad , \text{ si } N = 2. \end{aligned}$$

On démontre que le nombre de solution du problème (3.34) devient de plus en plus grand si la perturbation "tend" vers zero:

THÉORÈME 28 *Pour chaque entier* $n \geq 1$, *il existe* $\varepsilon_n > 0$ *tel que le problème (3.34) a au moins* n *solutions distinctes* $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon^2)$ *si* $|\varepsilon| < \varepsilon_n$. *De plus,* $\lambda_{0\varepsilon}^2 := \sup\{\lambda_\varepsilon^2\}$ *est fini et il existe une solution* $(u_{0\varepsilon}, \lambda_{0\varepsilon}^2)$ *du problème (3.34).*

4 Étude des inégalités hemivariationnelles

4.1 Perturbation d'une inégalité hemivariationnelle symétrique avec contrainte

Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbf{R}^N$ et soient $a_1, a_2 : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ deux formes bilinéaires, symétriques et continues. Soient $B_1, B_2 : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ opérateurs linéaires, auto-adjoints et coercifs. Pour $a, b, r > 0$, soit

$$S_r^{a,b} = \{(v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \ : \ a(B_1 v_1, v_1) + b(B_2 v_2, v_2) = r^2\}.$$

Soit $j : \Omega \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ telle que $j(x, \cdot)$ est localement Lipschitz. L'hypothèse fondamentale sur j est $j(x, -y) = j(x, y)$, pour p.p. $x \in \Omega$ et chaque $y \in \mathbf{R}^N$. On suppose que

(H_1) Il existe $\theta \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ et $\rho \in \mathbf{R}$ tels que $|z| \leq \theta(x) + \rho |y|^{p-1}$, pour p.p. $(x, y) \in \Omega \times \mathbf{R}^N$ et chaque $z \in \partial_y j(x, y)$.

On définit l'application $(A_1, A_2) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ par la relation

$$\langle (A_1, A_2)(u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2)$$

ainsi que l'application de dualité $\Lambda : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ par

$$\langle \Lambda(u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = a(B_1 u_1, v_1) + b(B_2 u_2, v_2).$$

On impose la condition de compacité

(H_2) Pour chaque suite $\{(u_n^1, u_n^2)\} \subset S_r^{a,b}$ telle que $u^i_n \rightharpoonup u_i$ dans $H_0^1(\Omega)$, pour chaque $z_n^i \in \partial f_i(u_n^i)$, tel que

$$a_i(u_n^i, u_n^i) + \langle z_n^i, u_n^i \rangle_V \to \alpha_i \in \mathbf{R}, \tag{4.35}$$

$i = 1, 2$, et pour chaque $w \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega; \mathbf{R}^N)$ satisfaisant

$$w(x) \in \partial_y j(x, (u_1 - u_2)(x)) \text{ pour p.p. } \quad x \in \Omega, \tag{4.36}$$

tel que

$$[(A_1, A_2) - \lambda_0 \cdot \Lambda]\,(u_n^1, u_n^2)$$

converge dans $H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, où

$$\lambda_0 = r^{-2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \int_\Omega \langle w(x), (u_1 - u_2)(x) \rangle \, dx), \tag{4.37}$$

il existe une sous-suite convergente de (u_n^1, u_n^2).

Soit $g : \Omega \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ une fonction de Carathéodory qui est localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable et qui ne satisfait aucune hypothèse de parité. On impose

(H_3) Il existe $\theta_1 \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$ et $\theta_2 \in L^\infty(\Omega)$ tels que

$$|z| \leq \theta_1(x) + \theta_2(x)|y|^{p-1},$$

pour p.p. $(x, y) \in \Omega \times \mathbf{R}^N$ et chaque $z \in \partial_y g(x, y)$.

Pour $\phi \in H^{-1}(\Omega)$, on considère le problème suivant: trouver $(u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que

$$(P_{r,a,b}) \begin{cases} a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2) + < \phi, v_1 > + < \phi, v_2 > + \\ + \int_\Omega \{ j_y^0(x, (u_1 - u_2)(x); (v_1 - v_2)(x)) + \\ g_y^0(x, (u_1 - u_2)(x); (v_1 - v_2)(x)) \} dx \geq \\ \geq \lambda_1 (B_1 u_1, v_1)_V + \lambda_2 (B_2 u_2, v_2)_V, \ \forall \ v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega), \\ \\ a(B_1 u_1, u_1) + b(B_2 u_2, u_2) = r^2. \end{cases}$$

Motreanu et Panagiotopoulos [36] ont montré que si $g = 0$ et $\phi = 0$, alors le problème $(P_{r,a,b})$ admet une infinité de solutions. Notre résultat est dans le même esprit que le théorème 23 et montre que si les perturbations g et ϕ sont assez petites, alors le nombre de solutions de ce problème devient de plus en plus grand. Plus précisément, on a

THÉORÈME 29 *Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_3)$ soient satisfaites. Alors, pour chaque $n \geq 1$, il existe $\delta_n > 0$ tel que, si $||\phi||_{H^{-1}} \leq \delta_n$ et si $||\theta_1||_{L^{p/(p-1)}} \leq \delta_n$, $||\theta_2||_{L^\infty} \leq \delta_n$, alors le problème $(P_{r,a,b})$ a au moins n solutions distinctes.*

4.2 Résultats d'existence du type Hartman-Stampacchia pour les inégalités hemivariationnelles

Soit V un espace de Banach reflexif infini dimensionnel tel qu'il existe $T : V \to L^p(\Omega, \mathbf{R}^k)$ un opérateur linéaire et continu, où $1 \leq p < \infty$, $k \geq 1$, et Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$. Soit $K \subset V$, $A : K \to V^*$ et $j = j(x, y) : \Omega \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ une fonction de Carathéodory qui est localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable $y \in \mathbf{R}^k$ et qui satisfait la condition

(j) il existe $h_1 \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega, \mathbf{R})$ et $h_2 \in L^\infty(\Omega, \mathbf{R})$ tels que

$$|z| \leq h_1(x) + h_2(x)|y|^{p-1},$$

pour p.p. $x \in \Omega$ et chaque $y \in \mathbf{R}^k$, $z \in \partial j(x, y)$. Soit $Tu = \hat{u}$, $u \in V$. On étudie le problème

(P) Trouver $u \in K$ tel que, pour chaque $v \in K$,

$$\langle Au, v - u \rangle + \int_\Omega j^0(x, \hat{u}(x); \hat{v}(x) - \hat{u}(x))dx \geq 0.$$

On montre plusieurs résultats d'existence pour ce problème, dont on cite

THÉORÈME 30 *Supposons que l'ensemble K est fermé, borné et convexe et que l'opérateur $A : K \to V^*$ est monotone et demi-continu sur $F \cap K$, pour chaque sous-espace fini dimensionel de V. Si j satisfait la condition (j) alors le problème (P) a au moins une solution.*

On montre aussi plusieurs résultats d'existence pour des inégalités variationnelles-hemivariationnelles du type: trouver $u \in K$ tel que

$$\langle Au - f, v - u \rangle + \Phi(v) - \Phi(u) + \int_T j^0(x, \gamma(u(x)); \gamma(v(x) - u(x)))d\mu \geq 0\,, \qquad \forall v \in K\,.$$

References

[1] G. ANZELLOTTI, The Euler equation for functionals with linear growth, *Trans. Amer. Math. Soc.* **290** (1985), 483–501.

[2] C. BANDLE ET M. MARCUS, Large solutions of semilinear elliptic equations: existence, uniqueness and asymptotic behavior, *J. Anal. Math.* **58** (1992), 9-24.

[3] M. BOCEA, P.D. PANAGIOTOPOULOS ET V. RĂDULESCU, A perturbation result for a double eigenvalue hemivariational inequality and applications, *J. Global Optimiz.* **14** (1999), 137-156.

[4] M. BOCEA, P.D. PANAGIOTOPOULOS ET V. RĂDULESCU, Double eigenvalue hemivariational inequalities with non-locally Lipschitz energy functional, *Commun. Appl. Nonlin. Anal.* **6** (1999), No. 4, 17-29.

[5] H. BREZIS ET E.H. LIEB, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, *Proc. Amer. Math. Soc.* **88** (1983), 486-490.

[6] H. BREZIS ET L. NIRENBERG, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983), 437-477.

[7] H. Brezis et L. Oswald, Remarks on sublinear elliptic equations, *Nonlinear Analysis, T.M.A.* **10** (1986), 55-64.

[8] C. Ciulcu, D. Motreanu et V. Rădulescu, Multiplicity of solutions for a class of non-symmetric eigenvalue hemivariational inequalities, *Math. Methods Appl. Sciences*, sous presse.

[9] F. Cîrstea, D. Motreanu et V. Rădulescu, Weak solutions of quasilinear problems with nonlinear boundary conditions, *Nonlinear Analysis, T.M.A.* **43** (2001), 623-636.

[10] F. Cîrstea et V. Rădulescu, Existence and uniqueness of positive solutions to a semilinear elliptic problem in $\mathbf{R}^N$, *J. Math. Anal. Appl.* **229** (1999), 417-425.

[11] F. Cîrstea et V. Rădulescu, Existence and nonexistence results for quasilinear problems with nonlinear boundary condition, *J. Math. Anal. Appl.*, **244** (2000), 169-183.

[12] F. Cîrstea et V. Rădulescu, Multiple solutions of degenerate perturbed elliptic problems involving a subcritical Sobolev exponent, *Topol. Meth. Nonlin. Anal.* **15** (2000), 281-298.

[13] F. Cîrstea et V. Rădulescu, On a double bifurcation quasilinear problem arising in the study of anisotropic continuous media, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **44** (2001), 527-548.

[14] F. Cîrstea et V. Rădulescu, Existence implies uniqueness for a class of singular anisotropic elliptic boundary value problems, *Math. Methods Appl. Sciences* **24** (2001), 771-779.

[15] F. Cîrstea et V. Rădulescu, Blow-up solutions for semilinear elliptic problems, *Nonlinear Analysis, T.M.A.* **48** (2002), 541-554.

[16] F. Cîrstea et V. Rădulescu, Existence and uniqueness of blow-up solutions for a class of logistic equations, *Commun. Contemp. Mathematics* **4** (2002), 559-586.

[17] F. Cîrstea et V. Rădulescu, Entire solutions blowing-up at infinity for semilinear elliptic systems, *J. Math. Pures Appliquées* **81** (2002), 827-846.

[18] F. Cîrstea et V. Rădulescu, Uniqueness of the blow-up boundary solution of logistic equations with absorbtion, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **335** (2002), 447-452.

[19] F. Cîrstea et V. Rădulescu, Asymptotics for the blow-up boundary solution of the logistic equation with absorption, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **336** (2003), sous presse.

[20] F. Cîrstea et V. Rădulescu, Solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic problems, *Houston J. Math.*, sous presse.

[21] D. C. Clark A variant of the Ljusternik-Schnirelmann theory, *Indiana Univ. Math. J.* **22** (1972), 65-74.

[22] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz et L. Tartar, On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity, *Comm. Partial Diff. Equations* **2** (1977), 193-222.

[23] R. Dautray et J.L. Lions, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, tome 1, Masson, Paris, 1988.

[24] M. Degiovanni, Nonsmooth critical point theory and applications, *Second World Congress of Nonlinear Analysts* (Athens, 1996), *Nonlinear Anal., T.M.A.* **30** (1997), 89-99.

[25] M. Degiovanni et M. Marzocchi, A critical point theory for nonsmooth functionals, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **167** (1994), 73-100.

[26] M. DEGIOVANNI, M. MARZOCCHI ET V. RĂDULESCU, Multiple solutions of hemivariational inequalities with area-type term, *Calculus of Variations and PDE* **10** (2000), 355-387.

[27] M. DEGIOVANNI ET V. RĂDULESCU, Perturbations of nonsmooth symmetric nonlinear eigenvalue problems, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **329** (1999), 281-286.

[28] M. FUNDOS, P.D. PANAGIOTOPOULOS ET V. RĂDULESCU, Existence theorems of Hartmann-Stampacchia type for hemivariational inequalities and applications, *J. Global Optimiz.* **15** (1999), 41-54.

[29] F. GAZZOLA ET V. RĂDULESCU, A nonsmooth critical point theory approach to some nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^n$, *Differential Integral Equations* **13** (2000), 47-60.

[30] I.-R. IONESCU ET V. RĂDULESCU, Nonlinear eigenvalue problems arising in earthquake initiation, *Advances in Differential Equations*, sous presse.

[31] J.B. KELLER, On solution of $\Delta u = f(u)$, *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957), 503-510.

[32] C. LOEWNER ET L. NIRENBERG, Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations, in *Contributions to Analysis* (L. Ahlfors et al., Eds.), Academic Press, New York, 1974, 245-272.

[33] M. MARCUS, On solutions with blow-up at the boundary for a class of semilinear elliptic equations, in *Developments in Partial Differential Equations and Applications to Mathematical Physics* (G. Buttazzo et al., Eds.), Plenum Press, New York (1992), 65-77.

[34] P. MIRONESCU ET V. RĂDULESCU, A multiplicity theorem for locally Lipschitz periodic functionals, *J. Math. Anal. Appl.* **195** (1995), 621-637.

[35] E. MONTEFUSCO ET V. RĂDULESCU, Nonlinear eigenvalue problems for quasilinear operators on unbounded domains, *Nonlinear Differential Equations Applications (NoDEA)* **8** (2001), 481-497.

[36] D. MOTREANU ET P.D. PANAGIOTOPOULOS, Double eigenvalue problems for hemivariational inequalities, *Arch. Ration. Mech. Analysis* **140** (1997), 225-251.

[37] D. MOTREANU ET V. RĂDULESCU, Existence theorems for some classes of boundary value problems involving the p-Laplacian, *PanAmerican Math. Journal* **7** (1997), No. 2, 53-66.

[38] D. MOTREANU ET V. RĂDULESCU, Existence results for inequality problems with lack of convexity, *Numer. Funct. Anal. Optimiz.* **21** (2000), 869-884.

[39] D. MOTREANU ET V. RĂDULESCU, *Variational and Nonvariational Methods in Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems*, Kluwer Academic Publishers, Nonconvex Optimization and Its Applications, Dordrecht–Boston–London, sous presse.

[40] R. OSSERMAN, On the inequality $\Delta u \geq f(u)$, *Pacific J. Math.* **7** (1957), 1641-1647.

[41] P. D. PANAGIOTOPOULOS ET V. RĂDULESCU, Perturbations of hemivariational inequalities with constraints and applications, *J. Global Optimiz.* **12** (1998), 285-297.

[42] P.H. RABINOWITZ, On a class of nonlinear Schrödinger equations, *Zeit. Angew. Math. Phys.* **43** (1992), 270-291.

[43] A. RATTO, M. RIGOLI ET L. VÉRON, Scalar curvature and conformal deformation of hyperbolic space, *J. Funct. Anal.* **121** (1994), 15-77.

[44] V. RĂDULESCU, Nontrivial solutions for a multivalued problem with strong resonance, *Glasgow Math. Journal* **38** (1996), 53-61.

[45] V. Rădulescu, Sur l'équation multigroupe stationnaire de la diffusion des neutrons, *C.R. Acad. Sci. Paris* **323** (1996), 765-768.

[46] V. Rădulescu, Perturbations of symmetric hemivariational inequalities, in *Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering*, Editions Ziti, Thessaloniki, 2002 (C. Baniotopoulos, Ed.), 61-72.

[47] V. Rădulescu et D. Smets, Critical singular problems on infinite cones, *Nonlinear Analysis, T.M.A.*, sous presse.

[48] G. Stampacchia, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **15** (1965), 189-258.

[49] G. Tarantello, On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire* **9** (1992), 281-304.

[50] L. Véron, Semilinear elliptic equations with uniform blow-up on the boundary, *J. Anal. Math.* **59** (1992), 231-250.

Publications de ce mémoire

Chapitre I

1. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Existence and uniqueness of positive solutions to a semilinear elliptic problem in $\mathbf{R}^N$, *J. Math. Anal. Appl.* **229** (1999), 417-425.

2. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Multiple solutions of degenerate perturbed elliptic problems involving a subcritical Sobolev exponent, *Topol. Meth. Nonlin. Anal.* **15** (2000), 281-298.

3. V. Rădulescu et D. Smets, Critical singular problems on infinite cones, *Nonlinear Analysis, T.M.A.*, sous presse.

4. E. Montefusco et V. Rădulescu, Nonlinear eigenvalue problems for quasilinear operators on unbounded domains, *Nonlinear Differential Equations Applications (NoDEA)* **8** (2001), 481-497.

5. F. Cîrstea et V. Rădulescu, On a double bifurcation quasilinear problem arising in the study of anisotropic continuous media, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **44** (2001), 527-548.

6. D. Motreanu et V. Rădulescu, Existence theorems for some classes of boundary value problems involving the p-Laplacian, *PanAmerican Math. Journal* **7** (1997), No. 2, 53-66.

Chapitre II

1. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Blow-up boundary solutions for semilinear elliptic problems, *Nonlinear Analysis, T.M.A.* **48** (2002), 541-554.

2. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Existence and uniqueness of blow-up solutions for a class of logistic equations, *Commun. Contemp. Mathematics* **4** (2002), 559-586.

3. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Entire solutions blowing-up at infinity for semilinear elliptic systems, *J. Math. Pures Appliquées*, **81** (2002), 827-846.

4. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Uniqueness of the blow-up boundary solution of logistic equations with absorbtion, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **335** (2002), 447-452.

5. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Asymptotics for the blow-up boundary solution of the logistic equation with absorption, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **336** (2003), sous presse.

6. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Existence implies uniqueness for a class of singular anisotropic elliptic boundary value problems, *Math. Methods Appl. Sciences* **24** (2001), 771-779.

Chapitre III

1. P. Mironescu et V. Rădulescu, A multiplicity theorem for locally Lipschitz periodic functionals, *J. Math. Anal. Appl.* **195** (1995), 621-637.

2. V. Rădulescu, Nontrivial solutions for a multivalued problem with strong resonance, *Glasgow Math. Journal* **38** (1996), 53-61.

3. F. Gazzola et V. Rădulescu, A nonsmooth critical point theory approach to some nonlinear elliptic equations in $\mathbf{R}^n$, *Differential Integral Equations* **13** (2000), 47-60.

4. M. Degiovanni et V. Rădulescu, Perturbations of nonsmooth symmetric nonlinear eigenvalue problems, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **329** (1999), 281-286.

5. M. Degiovanni, M. Marzocchi et V. Rădulescu, Multiple solutions of hemivariational inequalities with area-type term, *Calculus of Variations and PDE* **10** (2000), 355-387.

6. I.-R. Ionescu et V. Rădulescu, Nonlinear eigenvalue problems arising in earthquake initiation, *Advances in Differential Equations*, sous presse.

Chapitre IV

1. P. D. Panagiotopoulos et V. Rădulescu, Perturbations of hemivariational inequalities with constraints and applications, *J. Global Optimiz.* **12** (1998), 285-297.

2. M. Bocea, P.D. Panagiotopoulos et V. Rădulescu, A perturbation result for a double eigenvalue hemivariational inequality and applications, *J. Global Optimiz.* **14** (1999), 137-156.

3. M. Fundos, P.D. Panagiotopoulos et V. Rădulescu, Existence theorems of Hartmann-Stampacchia type for hemivariational inequalities and applications, *J. Global Optimiz.* **15** (1999), 41-54.

4. M. Bocea, P.D. Panagiotopoulos et V. Rădulescu, Double eigenvalue hemivariational inequalities with non-locally Lipschitz energy functional, *Commun. Appl. Nonlin. Anal.* **6** (1999), No. 4, 17-29.

5. D. Motreanu et V. Rădulescu, Existence results for inequality problems with lack of convexity, *Numer. Funct. Anal. Optimiz.* **21** (2000), 869-884.