# Analyse de quelques problèmes aux limites elliptiques non lineaires

Vicentiu D. RĂDULESCU

25 fevrier 2003

Chapitre I. Problèmes elliptiques semi-lineaires et quasi-lineaires: existence et unicite des solutions

1. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Existence and uniqueness of positive solutions to a semilinear elliptic problem in $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 229 (1999), 417-425.

2. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Multiple solutions of degenerate perturbed elliptic problems involving a subcritical Sobolev exponent, Topol. Meth. Nonlin. Anal. 15 (2000), 281-298.

3. V. Rădulescu et D. Smets, Critical singular problems on infinite cones, Nonlinear Analysis, T.M.A., sous presse.

4. E. Montefusco et V. Rădulescu, Nonlinear eigenvalue problems for quasilinear operators on unbounded domains, Nonlinear Differential Equations Applications (NoDEA) 8 (2001), 481-497.

5. F. Cîrstea et V. Rădulescu, On a double bifurcation quasilinear problem arising in the study of anisotropic continuous media, Proc. Edinburgh Math. Soc. 44 (2001), 527-548.

6. D. Motreanu et V. Rădulescu, Existence theorems for some classes of boundary value problems involving the $p$-Laplacian, PanAmerican Math. Journal 7 (1997), No. 2, 53-66.

Chapitre II. Problèmes elliptiques singuliers: existence, unicite et explosion des solutions


1. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Blow-up boundary solutions for semilinear elliptic problems, Nonlinear Analysis, T.M.A. 48 (2002), 541-554.

2. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Existence and uniqueness of blow-up solutions for a class of logistic equations, Commun. Contemp. Mathematics 4 (2002), 559-586.

3. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Entire solutions blowing-up at infinity for semilinear elliptic systems, J. Math. Pures Appliquees 81 (2002), 827-846.

4. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Uniqueness of the blow-up boundary solution of logistic equations with absorbtion, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002), 447-452.

5. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Asymptotics for the blow-up boundary solution of the logistic equation with absorption, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003), sous presse.

6. F. Cîrstea et V. Rădulescu, Existence implies uniqueness for a class of singular anisotropic elliptic boundary value problems, Math. Methods Appl. Sciences 24 (2001), 771-779.

Chapitre III. Problèmes elliptiques non lisses: theories de Clarke et de Degiovanni

1. P. Mironescu et V. Rădulescu, A multiplicity theorem for locally Lipschitz periodic functionals, J. Math. Anal. Appl. 195 (1995), 621-637.

2. V. Rădulescu, Nontrivial solutions for a multivalued problem with strong resonance, Glasgow Math. Journal 38 (1996), 53-61.

3. F. Gazzola et V. Rădulescu, A nonsmooth critical point theory approach to some nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$, Differential Integral Equations 13 (2000), 47-60.

4. M. Degiovanni et V. Rădulescu, Perturbations of nonsmooth symmetric nonlinear eigenvalue problems, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 329 (1999), 281-286.

5. M. Degiovanni, M. Marzocchi et V. Rădulescu, Multiple solutions of hemivariational inequalities with area-type term, Calculus of Variations and PDE 10 (2000), 355-387.

6. I.-R. Ionescu et V. Rădulescu, Nonlinear eigenvalue problems arising in earthquake initiation, Advances in Differential Equations, sous presse.

Chapitre IV. Etude des inegalites hemivariationnelles

1. P. D. Panagiotopoulos et V. Rădulescu, Perturbations of hemivariational inequalities with constraints and applications, J. Global Optimiz. 12 (1998), 285-297.

2. M. Bocea, P. D. Panagiotopoulos et V. Rădulescu, A perturbation result for a double eigenvalue hemivariational inequality and applications, J. Global Optimiz. 14 (1999), 137-156.

3. M. Fundos, P. D. Panagiotopoulos et V. Rădulescu, Existence theorems of Hartmann-Stampacchia type for hemivariational inequalities and applications, J. Global Optimiz. 15 (1999), 41-54.

4. M. Bocea, P. D. Panagiotopoulos et V. Rădulescu, Double eigenvalue hemivariational inequalities with non-locally Lipschitz energy functional, Commun. Appl. Nonlin. Anal. 6 (1999), No. 4, 17-29.

5. D. Motreanu et V. Rădulescu, Existence results for inequality problems with lack of convexity, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 21 (2000), 869-884.

Existence et unicite de la solution pour un problème elliptique sur $\mathbb{R}^N$ avec non linearite singulière

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x) f(u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \ (N > 2) \\ u > 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 \quad \text{si } \mid x \mid \to \infty\,. \end{cases} \qquad (P)$$

(p) $p \in C^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $p > 0$ dans $\mathbb{R}^N$; $\int_0^{\infty} r \cdot \max_{|x|=r} p(x) dr < \infty$;

(f1) $\exists\, \beta > 0$ t. q. $u \longmapsto \dfrac{f(u)}{u+\beta}$ soit decroissante sur $(0, \infty)$;

(f2) $\lim\limits_{u \searrow 0} \dfrac{f(u)}{u} = +\infty$ et $f$ est bornee dans un voisinage de $+\infty$.

Theorème 1. Le problème $(P)$ a une solution unique.

Theorème 2. $p$ radiale, $\int_0^{\infty} r p(r) dr = \infty \Longrightarrow (P)$ n'a aucune solution radiale.

Solutions multiples d'un problème critique degenere

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(|x|^{\alpha}\nabla u) = |u|^{2^*_\alpha - 2}u + f & \text{dans} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N\,,\ \alpha \in (0,2) \\ u \geq 0,\ u \not\equiv 0 & \text{dans} \quad \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P)$$

où $2^*_\alpha := 2N/(N-2+\alpha)$. Soit $S_\alpha(u;\Omega) = \dfrac{\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*_\alpha} dx\right)^{2/2^*_\alpha}}$. On definit

$$s^0_\alpha(\Omega) := \lim_{r\to 0} S_\alpha(\Omega \cap B_r) \qquad s^\infty_\alpha(\Omega) := \lim_{r\to\infty} S_\alpha(\Omega \setminus B_r).$$

Definition. L'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisfait la condition $\mathcal{C}$ si $\Omega$ est un cone de $\mathbb{R}^N$, ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, ou $S_\alpha(\Omega) < \min\{s^0_\alpha(\Omega), s^\infty_\alpha(\Omega)\}$.

Theorème. Soit $\Omega$ qui satisfait la condition $\mathcal{C}$. Alors $\forall\, g \in H^{-1}_+(\Omega;|x|^\alpha)$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ t. q. $\forall\, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $(P)$ avec $f = \varepsilon g$ admet au moins deux solutions.

Problèmes avec donnee au bord singulière

$$\begin{cases} \Delta u = p(x) f(u) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \,, \\ u \geq 0, \; u \not\equiv 0 & \text{dans } \Omega \,, \\ u(x) \to \infty & \text{si dist}\,(x, \partial\Omega) \to 0. \end{cases} \qquad (P)$$

$(f1)$ $\quad f \in C^1[0,\infty), \; f' \geq 0, \; f(0) = 0, f > 0 \text{ sur } (0,\infty);$

$(f2)$ $\quad \int_1^\infty [F(t)]^{-1/2}\, dt < \infty \,, \; F(t) = \int_0^t f(s)\, ds.$

$(p1)$ $\forall\, x_0 \in \Omega$ avec $p(x_0) = 0, \exists\, x_0 \ni \Omega_0 \subset\subset \Omega$ t. q. $p > 0$ sur $\partial\Omega_0$.

Theorème. Le problème $(P)$ a au moins une solution.

Solutions explosives à l'infini pour les systèmes elliptiques

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta u = p(x)g(v) & \text{dans } \mathbb{R}^N, \\ \Delta v = q(x)f(u) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{array}\right. \qquad (P)$$

- $p, q \in C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $p, q \geq 0$ et à symétrie radiale.
- $f, g \in C^{0,\beta}_{\text{loc}}[0, \infty)$, $f, g \geq 0$ croissantes.
- $\lim_{t\to\infty} g(cf(t))/t = 0, \forall\, c > 0.$

Exemples :

1) $f(t) = \sum_{j=1}^{l} a_j t^{\gamma_j}$, $g(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k t^{\theta_j}$, $\forall\, t > 0$, $a_j, b_k, \gamma_j, \theta_k > 0$ t. q. $\gamma\theta < 1$, où $\gamma = \max_{1\leq j\leq l} \gamma_j$, $\theta = \max_{1\leq k\leq m} \theta_k$.

2) $f(t) = (1+t^2)^{\gamma/2}$, $g(t) = (1+t^2)^{\theta/2}$, $\gamma, \theta > 0$ et $\gamma\theta < 1$.

3)

$$f(t) = \begin{cases} t^{\gamma} & \text{if } 0 \le t \le 1, \\ t^{\theta} & \text{if } t \ge 1, \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} t^{\theta} & \text{if } 0 \le t \le 1, \\ t^{\gamma} & \text{if } t \ge 1, \end{cases}$$

$\gamma, \theta > 0, \gamma\theta < 1$ et $f(t) = g(t) = 0$ si $t \le 0$.

4) $g(t) = t \ \ \forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0 \ \ \forall t \le 0$ et

$$f(t) = t\left[-\ln\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)\arctan t\right)\right]^{\gamma} \quad \forall t > 0, \quad \gamma \in (0, 1/2).$$

On deΘnit

$$\mathcal{G} := \{(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+;\ (\exists) \text{ solution radiale t. q. } (u(0), v(0)) = (a,b)\}$$

$$F(\mathcal{G}) := \{(a,b) \in \partial\mathcal{G}\,;\ a > 0 \text{ et } b > 0\}.$$

Théorème 1. On a $\mathcal{G} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. De plus,

i) Si $\int_0^\infty tp(t)\,dt = \int_0^\infty tq(t)\,dt = +\infty$, alors toute solution radiale positive de $(P)$ explose à l'infini.

ii) Si $\int_0^\infty tp(t)\,dt < \infty$ et $\int_0^\infty tq(t)\,dt < \infty$, alors toute solution radiale positive de $(P)$ est bornee. Si $(\tilde{u}, \tilde{v})$ sont deux solutions radiales positives de $(P)$, $\exists\, C > 0$ t. q. $\forall\, r \in [0, \infty)$,

$$\max\{|u(r) - \tilde{u}(r)|, |v(r) - \tilde{v}(r)|\} \le C \max\{|u(0) - \tilde{u}(0)|, |v(0) - \tilde{v}(0)|\}.$$

$$(\mathbf{H_1}) \quad f(0) = g(0) = 0,\ \liminf_{u\to\infty} f(u)/g(u) =: \sigma > 0;$$

$$(\mathbf{H_2}) \quad \int_1^\infty [G(t)]^{-1/2}\,dt < \infty.$$

Théorème 2. Soient $f, g \in C^1[0,\infty)$ qui satisfont $(\mathbf{H_1})$ et $(\mathbf{H_2})$. Si $\int_0^\infty tp(t)\,dt < \infty$, $\int_0^\infty tq(t)\,dt < \infty$, alors toute solution radiale $(u, v)$ de $(P)$ avec $(u(0), v(0)) \in F(\mathcal{G})$ est une solution explosive à l'infini.

ProbleŒmes d'explosion pour l'equation logistique: existence, unicite et comportement asymptotique

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ ouvert borne et regulier.

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\Delta u + au = b(x) f(u) & \text{dans} & \Omega, \\
u \geq 0 & \text{dans} & \Omega, \\
\displaystyle\lim_{\text{dist}\,(x,\partial\Omega)\to 0} u(x) = +\infty, & &
\end{array}
\right.
\qquad (P)
$$

ouŒ $a \in \mathbb{R}$, $b \in C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$, $b \geq 0$, $b \not\equiv 0$ sur $\Omega$.

On suppose que $f \in C^1[0,\infty)$ satisfait

$(A_1)$ $\quad f \geq 0$ et $f(u)/u$ est croissante sur $(0,\infty)$.

$(A_2)$ $\quad \displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{F(t)}} < \infty$, ouŒ $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\,ds$.

Exemples: (i) $f(u) = u^p$, $p > 1$; (ii) $f(u) = u^p \ln(u+1)$, $p > 1$; (iii) $f(u) = u^p \arctan u$, $p > 1$.

Soit

$$\Omega_0 = \mathrm{int}\,\{x \in \Omega : \ b(x) = 0\} \subset\subset \Omega.$$

Soit $\lambda_{\infty,1}$ la première valeur propre de $(-\Delta)$ dans $\Omega_0$. Convention: $\lambda_{\infty,1} = +\infty$ si $\Omega_0 = \emptyset$.

Theorème 1. Le problème $(P)$ admet une solution explosive (positive) si et seulement si $a \in (-\infty, \lambda_{\infty,1})$.

Idee de la preuve: principes de comparaison combines avec un resultat de S. Alama et G. Tarantello (Math. Z., 1996) pour le problème elliptique associe avec une condition de Dirichlet.

Remarque. Notre cadre inclut le cas où $b \equiv 0$ sur $\partial\Omega$ [ competition $0 \cdot (+\infty)$ sur le bord].

Unicite de la solution explosive et comportement asymptotique

Deﬁnition (Karamata, 1930). Soit $D > 0$ et $R : [D, \infty) \to (0, +\infty)$ une fonction mesurable. On dit que $R$ a une variation reguliere d'indice $\rho \in \mathbb{R}$ si $\lim_{u\to\infty} R(\xi u)/R(u) = \xi^{\rho}, \forall\, \xi > 0$.

Notation: $R \in \mathcal{R}_{\rho}$.

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions $k : (0, \nu) \to (0, +\infty)$ (pour un certain $\nu$), de classe $C^1$, croissantes, t. q. $\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{\int_0^t k(s)\, ds}{k(t)}\right)^{(i)} := \ell_i$, pour $i = \overline{0, 1}$.

Exemples. Soit $S \in C^1[D, \infty)$ t.q. $S' \in \mathcal{R}_{\rho}$ with $\rho > -1$. Alors

$a)$ $\quad k(t) = \exp\{-S(1/t)\} \quad \forall t \le 1/D \Longrightarrow k \in \mathcal{K}$, avec $\ell_1 = 0$.

$b)$ $\quad k(t) = 1/S(1/t) \quad \forall t \le 1/D \Longrightarrow k \in \mathcal{K}$, avec $\ell_1 = 1/(q+2) \in (0, 1)$.

$c)$ $\quad k(t) = 1/\ln S(1/t) \quad \forall t \le 1/D \Longrightarrow k \in \mathcal{K}$, avec $\ell_1 = 1$.

Remarques.

1) $k \in \mathcal{K} \Longrightarrow \ell_0 = 0, \;\; \ell_1 \in [0,1]$.

2) Soit $S \in C^1[D,\infty)$. Alors $S' \in \mathcal{R}_\rho$ with $\rho > -1 \Longleftrightarrow \exists\, C > 0, B > D$ t.q. $S(u) = Cu^{\rho+1}\exp\left\{\int_B^u \frac{y(t)}{t}\,dt\right\}, \forall u \geq B$, où $y \in C[B,\infty)$ et $\lim_{u\to\infty} y(u) = 0$.

3) Si $f \in C^1$, $f \geq 0$ et l'application $f(u)/u$ est croissante sur $(0,\infty)$ alors les conditions suivantes sont equivalentes:

- $f' \in \mathcal{R}_\rho$;
- $\exists \displaystyle\lim_{u\to\infty} \frac{uf'(u)}{f(u)} = \theta < +\infty$;
- $\exists \displaystyle\lim_{u\to\infty} \left(\frac{F}{f}\right)'(u) = \gamma > 0$,

avec $\gamma = \dfrac{1}{\gamma+2} = \dfrac{1}{\theta+1}$.

De plus, dans chacun de ces cas, $\rho \geq 0$.

4) $\rho > 0 \Longrightarrow$ condition de Keller-Osserman. La reciproque n'est pas vraie: $f(u) = u \ln^4(u+1)$. Il y a des cas où $\rho = 0$ et la condition (K-O) est satisfaite. Ex.: $f(u) = u$, $f(u) = u \ln(u+1)$.

Theorème 2. Supposons $f' \in \mathcal{R}_\rho$, $\rho > 0$ et

$$b(x) = c\, k^2(d(x)) + o(k^2(d(x))) \quad \text{si } d(x) \to 0, \;\; c > 0, \;\; k \in \mathcal{K}.$$

Alors $\forall\, a \in (-\infty, \lambda_{\infty,1})$, le problème $(P)$ admet une unique solution explosive $u_a$. De plus,

$$\lim_{d(x)\to 0} \frac{u_a(x)}{h(d(x))} = \xi_0 := \left(\frac{2 + \ell_1 \rho}{c(2+\rho)}\right)^{1/\rho},$$

où

$$\int_{h(t)}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{2F(s)}} = \int_0^t k(s)\, ds, \quad \forall t \in (0, \nu).$$

Un autre problème d'explosion

$$\begin{cases} \Delta u + au = b(x)f(u) & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega}_0 \,, \\ \mathcal{B}u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \,, \\ u = \infty & \text{sur } \partial\Omega_0 \,, \end{cases} \qquad (P)$$

où $\mathcal{B}u := \alpha(x)\partial_\nu u + \beta(x)u$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$.

• $f \in C^1[0, \infty)$, $f \geq 0$, $f(u)/u$ est croissante sur $(0, \infty)$. De plus, on suppose qu'il existe $\zeta > 0$, $t_0 \geq 1$ t.q. $f(\xi t) \leq \xi^{1+\zeta} f(t)$, $\forall \xi \in (0,1)$, $\forall t \geq t_0/\xi$ ($\Longrightarrow$ condition de Keller-Osserman).

Exemples : (i) $f(u) = u^p$, $p > 1$;

(ii) $f(u) = u^p \ln(u+1)$, $p > 1$;

(iii) $f(u) = u^p \arctan u$, $p > 1$.

Theorème 3. Supposons que

$$b(x) = c\,k(d(x)) + o(k(d(x))) \quad \text{si}\, d(x) \to 0, \;\; c > 0, \;\; k \in \mathcal{K}.$$

Alors $\forall\, a \in \mathbb{R}$, le problème $(P)$ admet une unique solution explosive $u_a$. De plus,

$$\lim_{d(x)\to 0} \frac{u_a(x)}{h(d(x))} = \xi_0 > 0.$$

Un resultat de multiplicite pour des fonctionnelles localement Lipschitz periodiques

- $X =$ espace de Banach reel, $Z$ un sous-groupe discret de $X$ (i.e., $\inf_{z\in Z\setminus\{0\}} \|z\| > 0$), $f \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$.

Definition. (i) $f : X \to \mathbb{R}$ est $Z$-periodique si $f(x+z) = f(x)$, $\forall\, x \in X,\ z \in Z$.

(ii) Un point $u \in X$ est un point critique de $f$ si $f^0(u;v) \geq 0, \forall\, v \in X$.

$$f^0(u;v) = \limsup_{\substack{w\to u\\ \lambda\searrow 0}} \frac{f(w+\lambda v) - f(w)}{\lambda}\,, \qquad v \in X\,.$$

Theoreme 1. Soit $f \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$, $Z$-periodique, bornee inferieurement et qui satisfait la condition de Palais-Smale $(PS)_Z$. Alors $f$ a au moins $n+1$ orbites critiques distinctes, ou $n$ est la dimension de l'espace vectoriel engendre par $Z$.

Application: problème du pendule

$$\begin{cases} x''(t) + f(t) \in [\underline{g}(x(t)), \overline{g}(x(t))] & \text{p.p. } t \in (0,1) \\ x(0) = x(1)\,, \end{cases} \qquad (P)$$

où

- $f \in L^p(0,1), p > 1;$
- $g \in L^\infty(\mathbb{R});$
- $\int_0^T g(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = 0\,.$

$$\underline{g}(u) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{essinf}\{g(u);\ |u-v| < \varepsilon\} \quad \overline{g}(u) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{esssup}\{g(u);\ |u-v| < \varepsilon\}\,.$$

Theorème 2. Le problème $(P)$ a au moins deux solutions distinctes dans l'espace

$$X := H_p^1(0,1) = \{x \in H^1(0,1);\ x(0) = x(1)\}\,.$$

Deux approches parallèles d'un problème non lineaire dans $\mathbb{R}^N$

$$-\Delta u + b(x)u = f(x,u) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N \ ,$$

- $f$ regulière, sous-critique, super-lineaire; $b \geq b_0 > 0$ dans $\mathbb{R}^N$.

$$E = \left\{ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R};\ \int_{\mathbb{R}^N} (|Du|^2 + b(x)u^2) < \infty \right\}.$$

Problème 1. Trouver $u \in E$ t.q.

$$-\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}(x,u)D_i u) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial s}(x,u)D_i u D_j u + b(x)u = f(x,u). \tag{$P_1$}$$

$$\begin{cases} a_{ij} \equiv a_{ji} \\ a_{ij}(x,\cdot) \in C^1(\mathbb{R}) \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N \\ a_{ij}(x,u)s,\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial s}(x,u)s \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}) \ ; \end{cases}$$

$$\exists \nu > 0 \quad \text{tel que} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u) s \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2 \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

$$\begin{cases} \exists \mu \in (2, 2^*) \,, \quad \gamma \in (0, \mu - 2) \quad \text{tel que} \\ 0 \leq s \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial s}(x,u) s \xi_i \xi_j \leq \gamma \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,s) \xi_i \xi_j \,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \exists \underline{b} > 0 \quad \text{tel que} \quad b(x) \geq \underline{b} \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N \\ \text{ess} \lim\limits_{|x| \to \infty} b(x) = +\infty \,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est une fonction de Caratheodory} \\ f(x,0) = 0 \qquad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N \\ 0 \leq \mu F(x,s) \leq s f(x,s) \qquad \forall s \geq 0 \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^N \,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\mathbb{R}^N) \text{ tel que} \\ |f(x,s)| \leq f_\varepsilon(x) + \varepsilon |s|^{\frac{N+2}{N-2}} \qquad \forall s \in \mathbb{R} \text{ et p.p. } x \in \mathbb{R}^N \ . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exists C \geq 0\,, \quad \exists \delta \in (2, 2^*)\,, \quad \exists G \in L^{q(\delta)}(\mathbb{R}^N),\ q(\delta) = \dfrac{2N}{2N + (2-N)\delta} \\ F(x,s) \leq G(x)|s|^\delta + C|s|^{2^*} \qquad \forall s \in \mathbb{R},\ \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N \ . \end{cases}$$

Theoreme 1. Le probleme $(P_1)$ admet au moins une solution positive dans $E$.

Problème 2. Trouver $u \in E$ t.q.

$$-\Delta u + b(x)u \in [\underline{f}(x,u), \overline{f}(x,u)] \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N. \tag{$P_2$}$$

$$\underline{f}(x,s) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{essinf} \{f(x,t);\ |t-s| < \varepsilon\}$$

$$\overline{f}(x,s) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{esssup} \{f(x,t);\ |t-s| < \varepsilon\}.$$

- $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable t.q. $|f(x,s)| \leq C(|s| + |s|^p)$, p.p. $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $1 < p \leq (N+2)/(N-2)$.
- $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \operatorname{esssup} \left\{ \left| \frac{f(x,s)}{s} \right|;\ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times (-\varepsilon, \varepsilon) \right\} = 0.$
- $\exists\, \mu > 2$ t.q. $0 \leq \mu F(x,s) \leq s\underline{f}(x,s)$ p.p. $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$.

Théorème 2. Le problème $(P_2)$ admet au moins une solution positive dans $E$.

Resultats d'existence du type Hartman-Stampacchia pour les inegalites hemivariationnelles

• $V =$ espace de Banach reflexif infini dimensionnel t.q. $\exists\, T : V \to L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ lineaire et continu, où $1 \leq p < \infty,\ k \geq 1$, et $\Omega$ est un ouvert borne de $\mathbb{R}^N$.

• $K \subset V$, $A : K \to V^*$, $j = j(x, y) : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction de Caratheodory qui est localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable et t.q. $\exists\, h_1 \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega, \mathbb{R})$, $\exists\, h_2 \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$:

$$|z| \leq h_1(x) + h_2(x)|y|^{p-1}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \forall\, y \in \mathbb{R}^k, z \in \partial j(x, y).$$

Notation. $Tu = \hat{u}$.

Problème (P) Trouver $u \in K$ t.q. $\forall\, v \in K$,

$$\langle Au, v-u\rangle + \int_\Omega j^0(x,\hat{u}(x);\hat{v}(x)-\hat{u}(x))dx \geq 0.$$

Theorème 1. Supposons que l'ensemble $K$ est ferme, borne et convexe et que l'operateur $A : K \to V^*$ est monotone et demi-continu sur $F \cap K$, pour chaque sous-espace fini dimensionel de $V$. Alors (P) admet au moins une solution.

On montre aussi plusieurs resultats d'existence pour des inegalites variationnelles-hemivariationnelles du type: trouver $u \in K$ tel que $\forall v \in K$,

$$\langle Au - f, v-u\rangle + \Phi(v) - \Phi(u) + \int_T j^0(x,\gamma(u(x));\gamma(v(x)-u(x)))d\mu \geq 0\,.$$

Perturbation d'une inegalite hemivariationnelle symetrique avec contrainte

• $a_1, a_2 : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ bilineaires, symetriques et continues;
$B_1, B_2 : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ operateurs lineaires, auto-adjoints et coercifs.

$$S_r^{a,b} = \{(v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \ : \ a(B_1 v_1, v_1) + b(B_2 v_2, v_2) = r^2\}.$$

• $j : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ t.q. $j(x, \cdot)$ est localement Lipschitz et $j(x, -y) = j(x, y)$, p.p. $x \in \Omega, \forall\, y \in \mathbb{R}^N$.

• $\exists\, \theta \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $\rho \in \mathbb{R}$ t.q. $|z| \le \theta(x) + \rho |y|^{p-1}$, pour p.p. $(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ et chaque $z \in \partial_y j(x, y)$.

• $(A_1, A_2) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$,

$$\langle (A_1, A_2)(u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2)$$

• $\Lambda : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$,

$$\langle \Lambda(u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = a(B_1 u_1, v_1) + b(B_2 u_2, v_2).$$

- $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ fonction de Caratheodory, localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable et qui ne satisfait aucune hypothèse de parite.
- $\exists\, \theta_1 \in L^{p/(p-1)}(\Omega),\ \theta_2 \in L^{\infty}(\Omega)$ t.q.

$$|z| \le \theta_1(x) + \theta_2(x)|y|^{p-1}, \ \text{ p.p. } (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^N, \forall\, z \in \partial_y g(x, y).$$

Problème. Pour $\phi \in H^{-1}(\Omega)$, trouver $(u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et

$(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ t.q.

$$\left\{\begin{array}{l} a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2) + < \phi, v_1 > + < \phi, v_2 > + \\ + \int\limits_{\Omega} \{ j_y^0(x, (u_1 - u_2)(x); (v_1 - v_2)(x)) + \\ g_y^0(x, (u_1 - u_2)(x); (v_1 - v_2)(x)) \} dx \geq \\ \geq \lambda_1 (B_1 u_1, v_1)_V + \lambda_2 (B_2 u_2, v_2)_V, \ \forall\, v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega), \\ \\ a(B_1 u_1, u_1) + b(B_2 u_2, u_2) = r^2. \end{array}\right. \qquad (P)$$

Theorème. Pour chaque $n \geq 1$, il existe $\delta_n > 0$ t.q. si $||\phi||_{H^{-1}} \leq \delta_n$ et $||\theta_1||_{L^{p/(p-1)}} \leq \delta_n$, $||\theta_2||_{L^\infty} \leq \delta_n$, alors le problème $(P_{r,a,b})$ a au moins $n$ solutions distinctes.