ANALIZĂ FUNCŢIONALĂ
Teorie şi aplicaţii

Haim BREZIS

Université Pierre et Marie Curie

Membru al Academiei Franceze

Membru al Institut Universitaire de France

Membru de onoare al Academiei Române

Distinguished Visitor la Rutgers University, U.S.A.

(traducerea: Profesor universitar Vicenţiu Rădulescu)

Cuprins

CUVÂNT ÎNAINTE LA EDIŢIA ÎN LIMBA ROMÂNĂ

A realiza traducerea uneia dintre cărţile de referinţă ale matematicii reprezintă o sarcină şi o îndatorire de maximă importanţă. Căci aşa stau cu adevărat lucrurile în privinţa cărţii de Analiză Funcţională a Profesorului Brezis, după care au învăţat şi învaţă studenţii la Matematică din foarte multe universităţi ale lumii. În faţa unei asemenea lucrări, dense, moderne şi cu numeroase deschideri, cuvintele sunt de prisos.

Sunt recunoscător Dascălului meu pentru deosebitul privilegiu oferit alegându-mă să traduc în limba română această importantă carte.

Îi mulţumesc colegului Mircea Preda de la Facultatea de Matematică-Informatică a Universităţii din Craiova pentru scanarea figurilor şi pentru îmbunătăţirea considerabilă a fişierului iniţial în LATEX al acestei lucrări.

Vicenţiu Rădulescu

NOTAŢII

Notaţii generale

E' spaţiul dual al lui E
$\langle\ ,\ \rangle$ produsul scalar în dualitatea E', E
$[f = \alpha] = \{x;\ f(x) = \alpha\}$
$B(x_0, r) = \{x;\ \|x - x_0\| < r\}$ bila deschisă centrată în x_0 şi de rază r
$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$
epi $\varphi = \{(x, \lambda);\ \varphi(x) \leq \lambda\}$ epigraful lui φ
φ^* funcţia conjugată a lui φ
$\mathcal{L}(E, F)$ spaţiul operatorilor liniari şi continui de la E în F
$M^\perp$ ortogonalul lui M
$D(A)$ domeniul operatorului A
$G(A)$ graful operatorului A
$N(A)$ nucleul operatorului A
$R(A)$ imaginea operatorului A
$\sigma(E, E')$ topologia slabă definită pe E
$\sigma(E', E)$ topologia * slabă definită pe E'
$\rightharpoonup$ convergenţa slabă
J injecţia canonică de la E în E''
p' exponentul conjugat al lui p, adică $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$
a.p.t. aproape peste tot
$|A|$ măsura (Lebesgue) a mulţimii A
Supp f suportul funcţiei f
$f * g$ produsul de convoluţie
ρ_n şir regularizant
$(\tau_h f)(x) = f(x + h)$ translatata funcţiei f
$\omega \subset\subset \Omega$ deschis ω inclus în sens tare în Ω, adică $\bar{\omega}$ compact şi $\bar{\omega} \subset \Omega$
P_K proiecţia pe convexul închis K

$|\ \ |$ norma Hilbertiană
$\rho(T)$ mulţimea rezolvantă a operatorului T
$\sigma(T)$ spectrul operatorului T
$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ rezolvanta operatorului T
$A_\lambda = AJ_\lambda$ regularizata Yosida a operatorului T
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) = \operatorname{grad} u$
$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} u$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$
$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ = Laplacianul lui u
$\mathbf{R}_+^N = \{x = (x', x_N) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{R},\ x_N > 0\}$
$Q = \{x = (x', x_N) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{R},\ |x'| < 1$ şi $|x_N| < 1\}$
$Q_+ = Q \cap \mathbf{R}_+^N$
$Q_0 = \{x \in Q;\ x_N = 0\}$
$(D_h u)(x) = \frac{1}{|h|}\left(u(x+h) - u(x)\right)$
$\frac{\partial u}{\partial n}$ derivata normală exterioară

Spaţii funcţionale
$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ deschis
$\partial\Omega = \Gamma$ = frontiera lui Ω
$L^p(\Omega) = \left\{u \text{ măsurabilă pe } \Omega \text{ şi } \int_\Omega |u|^p dx < \infty\right\}, \quad 1 \le p < \infty$
$L^\infty(\Omega) = \{u$ măsurabilă pe Ω şi $\exists C$ astfel încât $|u(x)| \le C$ a.p.t. în $\Omega\}$
$C_c(\Omega)$ funcţiile continue cu suportul compact inclus în Ω
$C^k(\Omega)$ funcţiile de k ori continuu diferenţiabile pe Ω (k întreg ≥ 0)
$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\ge 0} C^k(\Omega)$
$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$
$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$
$C(\bar\Omega)$ funcţiile continue pe $\bar\Omega$
$C^k(\bar\Omega)$ funcţiile u din $C^k(\Omega)$ astfel încât pentru orice multi-indice α, $|\alpha| \le k$, aplicaţia

$x \in \Omega \longmapsto D^\alpha u(x)$ se prelungeşte continuu pe $\bar{\Omega}$

$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap\limits_k C^k(\bar{\Omega})$

$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C(\Omega);\ \mathrm{Sup}_{x,y\in\Omega} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$ cu $0 < \alpha < 1$

$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega);\ D^j u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\ \forall j,\ |j| \le k\}$

$W^{1,p},\ W_0^{1,p},\ W^{m,p},\ H^1,\ H_0^1,\ H^m$ spaţii Sobolev

INTRODUCERE

Această lucrare reia într-o formă mult mai elaborată un curs de “Maîtrise” ţinut de autor la Universitatea Pierre et Marie Curie (Paris VI). Sunt presupuse cunoscute elementele de bază de Topologie Generală, Teoria Integrării şi de Calcul Diferenţial.

Prima parte a cursului (Capitolele I-VII) dezvoltă mai multe rezultate abstracte de Analiză Funcţională. Partea a doua (Capitolele VIII-X) are în vedere studiul spaţiilor funcţionale “concrete” care intervin în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale. Aceste două ramuri ale Analizei sunt strâns legate. Din punct de vedere istoric, Analiza Funcţională “abstractă” s-a dezvoltat mai întâi pentru a răspunde unor întrebări legate de rezolvarea ecuaţiilor cu derivate parţiale. Pe de altă parte, progresele Analizei Funcţionale “abstracte” au stimulat în mod considerabil teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale. Acest curs nu conţine nici o referinţă istorică; recomandăm cititorului să consulte lucrarea J. Dieudonné [3]. Sperăm că această carte va putea fi utilă atât studenţilor interesaţi de “Matematici Pure” cât şi celor care doresc să se orienteze către “Matematicile Aplicate”.

Mulţumesc

– Domnului G. Tronel care mi-a sugerat numeroase ameliorări.

– Domnilor Ph. Ciarlet şi P. Rabinowitz pentru sfaturile lor preţioase şi pentru încurajări.

– Domnilor Berestycki, Gallouet, Kavian, Mc Intosh pentru remarcile lor utile.

– Următoarelor instituţii: Mathematics Research Center, University of Wisconsin şi Department of Mathematics, University of Chicago, unde au fost redactate unele părţi din această carte.

Dedic această carte memoriei lui Guido Stampacchia, ca omagiu unui Maestru al Analizei Funcţionale, dispărut prematur.

H. BREZIS

Avertismente

1) Notaţia [EX] face referinţă la lucrarea lui H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Recueil de Problémes et Exercices*, Masson.

2) Anumite enunţuri sau paragrafe sunt precedate de simbolul •; este vorba de aspecte **foarte importante**. Simbolul ⋆ precedă anumite enunţuri care pot fi omise la o primă citire.

3) Am adoptat o numerotare continuă pentru propoziţii, teoreme şi corolare; doar lemele sunt numerotate separat.

4) Pe tot parcursul lucrării considerăm doar **spaţii vectoriale peste R** (ceea ce este regretabil, dar simplifică prezentarea). Majoritatea enunţurilor rămân valabile pentru spaţii vectoriale peste **C**; câteva modificări sunt totuşi necesare uneori în acest caz. In [EX] se prezintă lista schimbărilor care trebuie aduse atunci când se lucrează cu spaţii vectoriale peste **C**.

Capitolul I

TEOREMELE HAHN-BANACH. INTRODUCERE ÎN TEORIA FUNCŢIILOR CONVEXE CONJUGATE

I.1 Forma analitică a teoremei Hahn-Banach: prelungirea funcţionalelor liniare

Fie E un spaţiu vectorial peste $\mathbf{R}$. Reamintim că o **formă liniară** este o funcţie definită pe E sau pe un subspaţiu vectorial al lui E, **cu valori în** $\mathbf{R}$. Rezultatul esenţial din această secţiune este legat de prelungirea unei forme liniare definite pe un subspaţiu vectorial al lui E la o formă liniară definită pe întregul spaţiu E.

Teorema I.1 (Hahn-Banach, forma analitică). – Fie $p : E \to \mathbf{R}$ **o aplicaţie care verifică** ([1])

$$(1) \qquad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E \quad \textbf{şi} \quad \forall \lambda > 0,$$

$$(2) \qquad p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E.$$

Fie $G \subset E$ **un subspaţiu vectorial şi** $g : G \to \mathbf{R}$ **o aplicaţie liniară astfel încât**

$$(3) \qquad g(x) \le p(x) \quad \forall x \in G.$$

Sub aceste ipoteze, există o funcţională liniară f **definită pe întregul spaţiu** E **care prelungeşte** g**, adică**

$$g(x) = f(x) \quad \forall x \in G$$

[1] O funcţie p care satisface (1) şi (2) se numeşte adesea **funcţională Minkowski**.

şi astfel încât

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E. \tag{4}$$

Demonstraţia teoremei I.1 face apel la lema lui Zorn, al cărei enunţ îl vom reaminti în cele ce urmează. Vom începe prin a preciza câteva noţiuni legate de teoria mulţimilor ordonate.

Fie P o mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine (parţială) $\leq$. Spunem că o submulţime $Q \subset P$ este **total ordonată** dacă pentru orice pereche (a, b) din Q are loc (cel puţin) una dintre relaţiile $a \leq b$ sau $b \leq a$.

Fie $Q \subset P$ o submulţime a lui P; spunem că $c \in P$ este un **majorant al lui** Q dacă $a \leq c$ pentru orice $a \in Q$.

Spunem că $m \in P$ este un element **maximal** al lui P dacă pentru orice $x \in P$ astfel încât $m \leq x$ rezultă cu necesitate că $x = m$. Observăm că un element maximal al lui P nu este neapărat un majorant al lui P.

Spunem că P este **inductivă** dacă orice submulţime total ordonată a lui P are un majorant.

Lema I.1 (Zorn). – Orice mulţime inductiv ordonată, nevidă, admite un element maximal.

O demonstraţie a lemei lui Zorn (folosind axioma alegerii) se află în N. Dunford-J. Schwartz [1] (Vol. 1, Teorema 1.2.7),
P. Dubreil-M.L. Dubreil Jacotin [1] (Cap. 6) sau Lang [1].

Remarca 1. – Nu este indispensabil pentru un analist de a cunoaşte demonstraţia lemei lui Zorn. Din contră, este **esenţial** să înţeleagă bine enunţul acestui rezultat şi să-l aplice corect în diverse situaţii. Lema lui Zorn are numeroase şi importante aplicaţii în analiză; este un instrument indispensabil pentru stabilirea unor rezultate de **existenţă**.

Demonstraţia teoremei I.1. – Considerăm mulţimea

$$P = \left\{ h \;\middle|\; \begin{array}{l} h : D(h) \subset E \to \mathbf{R}, \quad D(h) \text{ este un subspaţiu} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{liniar al lui } E,\ h \text{ este liniară}, \\ G \subset D(h),\ h \text{ prelungeşte } g \text{ şi } h(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D(h) \end{array} \right\}$$

Pe mulţimea P definim relaţia de ordine

$$(h_1 \leq h_2) \Leftrightarrow (D(h_1) \subset D(h_2) \text{ şi } h_2 \text{ prelungeşte } h_1)\,.$$

Evident, P nu este vidă, deoarece $g \in P$. Pe de altă parte, P este inductiv ordonată. Intr-adevăr, fie $Q \subset P$ o submulţime total ordonată; fie $Q = (h_i)_{i \in I}$. Definim

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i), \quad h(x) = h_i(x) \quad \text{dacă } x \in D(h_i) \text{ pentru un anume } i.$$

Este uşor de verificat că definiţia lui h are sens, că $h \in P$ şi h este un majorant al lui Q. Conform lemei lui Zorn, rezultă că P admite un element maximal notat f. Arătăm în cele ce urmează că $D(f) = E$, ceea ce completează demonstraţia teoremei I.1.

Presupunem, prin reducere la absurd, că $D(f) \neq E$. Fie $x_0 \notin D(f)$; notăm $D(h) = D(f) + \mathbf{R}x_0$ şi, pentru orice $x \in D(f)$, fie $h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$ $(t \in \mathbf{R})$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$ este o constantă care va fi aleasă ulterior astfel încât $h \in P$. Trebuie să ne asigurăm că

$$f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \quad \forall x \in D(f) \quad \text{şi } \forall t \in \mathbf{R}.$$

Conform (1), e suficient să verificăm că

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) & \forall x \in D(f) \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) & \forall x \in D(f). \end{cases}$$

Altfel spus, trebuie găsit α astfel ca

$$\mathrm{Sup}_{y \in D(f)} \{f(y) - p(y - x_0)\} \leq \alpha \leq \mathrm{Inf}_{x \in D(f)} \{p(x + x_0) - f(x)\}.$$

Alegerea lui α cu această proprietate este posibilă deoarece

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x) \quad \forall x \in D(f), \quad \forall y \in D(f);$$

într-adevăr, rezultă din (2) că

$$f(x) + f(y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0).$$

Deducem astfel că $f \leq h$, contradicţie, căci f este element maximal şi $h \neq f$.

Indicăm în continuare câteva aplicaţii simple ale teoremei I.1 dacă E este un **spaţiu vectorial normat** (s.v.n.) cu norma $\| \ \|$.

Notaţie: Notăm prin E' dualul topologic ([2]) al lui E, adică spaţiul tuturor **funcţionalelor liniare şi continue pe** E; **norma duală** pe E' este definită prin

$$\|f\|_{E'} = \operatorname{Sup}_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} |f(x)| = \operatorname{Sup}_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} f(x). \tag{5}$$

Dacă $f \in E'$ şi $x \in E$ vom scrie în general $\langle f, x\rangle$ în loc de $f(x)$; spunem că $\langle\ ,\ \rangle$ este **produsul scalar pentru dualitatea** E', E.

Este cunoscut că E' este un spaţiu Banach, adică E' este complet (chiar dacă E nu este complet); aceasta rezultă din faptul că $\mathbf{R}$ este complet.

• **Corolarul I.2. – Fie** G **un subspaţiu vectorial al lui** E **şi** $g : G \to \mathbf{R}$ **o funcţională liniară şi continuă de normă**

$$\|g\|_{G'} = \operatorname{Sup}_{\substack{x\in G\\ \|x\|\leq 1}} g(x).$$

Atunci există $f \in E'$ **o prelungire a lui** g **astfel încât**

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

Demonstraţie. – Aplicăm teorema I.1 cu $p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|$.

• **Corolarul I.3. – Pentru orice** $x_0 \in E$ **există** $f_0 \in E'$ **astfel încât** ([3])

$$\|f_0\| = \|x_0\| \ \textbf{şi}\ \langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2.$$

Demonstraţie. – Aplicăm corolarul I.2 cu $G = \mathbf{R}x_0$ şi $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$ astfel că $\|g\|_{G'} = \|x_0\|$.

Remarca 2. – Elementul f_0 dat în corolarul I.3 nu este în general unic (încercaţi să construiţi un exemplu sau vedeţi [EX]). Totuşi, dacă E' este **strict convex** ([4]) – de exemplu dacă E este un spaţiu Hilbert (vezi Capitolul V) sau dacă $E = L^p(\Omega)$ cu $1 < p < \infty$ (vezi Capitolul IV) –atunci f_0 este unic. In general, notăm, pentru orice $x_0 \in E$

$$F(x_0) = \left\{f_0 \in E'; \|f_0\| = \|x_0\| \text{ şi } \langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2\right\}.$$

[2] In literatura americană dualul topologic al lui E se notează cu $E^\star$. Atenţie la confuzii!

[3] Dacă nu este pericol de confuzie vom scrie $\|f\|$ în loc de $\|f\|_{E'}$.

[4] Un spaţiu normat se numeşte **strict convex** dacă $\|tx + (1-t)y\| < 1 \quad \forall t \in (0,1), \quad \forall x, y \in E$ cu $\|x\| = \|y\| = 1$ şi $x \neq y$.

Aplicaţia (multivocă) $x_0 \mapsto F(x_0)$ este numită **aplicaţia de dualitate** de la E în E'; unele dintre proprietăţile sale sunt descrise în [EX].

• **Corolarul I.4. – Pentru orice $x \in E$ avem**

$$\|x\| = \operatorname{Sup}_{\substack{f\in E' \\ \|f\|\le 1}} |\langle f, x\rangle| = \operatorname{Max}_{\substack{f\in E' \\ \|f\|\le 1}} |\langle f, x\rangle|. \tag{6}$$

Demonstraţie. Fără a micşora generalitatea, putem presupune că $x \neq 0$. Este evident că

$$\operatorname{Sup}_{\substack{f\in E' \\ \|f\|\le 1}} |\langle f, x\rangle| \le \|x\|.$$

Pe de altă parte (corolarul I.3), există $f_0 \in E'$ astfel încât $\|f_0\| = \|x\|$ şi $\langle f_0, x\rangle = \|x\|^2$. Fie $f_1 = f_0/\|x\|$. Rezultă că $\|f_1\| = 1$ şi $\langle f_1, x\rangle = \|x\|$.

Remarca 3. – Formula (5) –care este o **definiţie**– nu trebuie confundată cu formula (6), care este un **rezultat**. In general, "Sup" din (5) **nu este atins** (a se vedea un exemplu în [EX]). Totuşi, "Sup" din (5) este atins dacă E este un spaţiu Banach reflexiv (a se vedea Capitolul III); o teoremă dificilă datorată lui R. C. James afirmă reciproca: dacă E este un spaţiu Banach astfel încât pentru orice $f \in E'$, "Sup" din (5) este atins, atunci E este reflexiv (a se vedea un exemplu în Diestel [1] (Capitolul 1) sau Holmes [1]).

I.2 Forme geometrice ale teoremei Hahn-Banach: separarea mulţimilor convexe

Incepem cu câteva preliminarii relative la hiperplane. In cele ce urmează, notăm prin E un s.v.n.

Definiţie. – Un **hiperplan** (afin) este o submulţime H a lui E de forma

$$H = \{x \in E\,;\, f(x) = \alpha\},$$

unde f este o funcţională liniară ([5]) pe E care **nu este identic nulă** şi $\alpha \in \mathbf{R}$ este o constantă dată. Spunem că H este un **hiperplan de ecuaţie** $[f = \alpha]$.

[5] Nu este neapărat necesar ca f să fie continuă (Dacă E este de dimensiune infinită, atunci există întotdeauna funcţionale liniare care nu sunt continue; a se vedea [EX]).

Propoziţia I.5. – Hiperplanul de ecuaţie $[f = \alpha]$ este închis dacă şi numai dacă f este continuă.

DEMONSTRAŢIE. – Este limpede că dacă f este continuă atunci H este închisă. Reciproc, presupunem că H este închisă. Complementara H^c a lui H este deschisă şi nevidă (deoarece f nu este identic nulă). Fie $x_0 \in H^c$ şi presupunem (pentru a fixa ideile) că $f(x_0) < \alpha$. Fie $r > 0$ astfel încât $B(x_0, r) \subset H^c$, unde

$$B(x_0, r) = \{x \in E\,;\, \|x - x_0\| < r\}.$$

Avem

$$f(x) < \alpha \quad \forall x \in B(x_0, r). \tag{7}$$

Intr-adevăr, $f(x_1) > \alpha$ pentru un anume $x_1 \in B(x_0, r)$. Segmentul

$$\{x_t = (1-t)x_0 + tx_1\,;\, t \in [0, 1]\}$$

este conţinut în $B(x_0, r)$ şi deci $f(x_t) \neq \alpha, \quad \forall t \in [0, 1]$; pe de altă parte $f(x_t) = \alpha$, pentru un anume $t \in [0, 1]$, mai precis $t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$. Aceasta este o contradicţie, deci relaţia (7) este demonstrată. Rezultă din (7) că

$$f(x_0 + rz) < \alpha \quad \forall z \in B(0, 1).$$

Deci f este continuă şi $\|f\| \leq \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$.

Definiţie. – Fie A şi B două submulţimi ale lui E. Spunem că hiperplanul H de ecuaţie $[f = \alpha]$ **separă** A **şi** B **în sens larg** dacă

$$\boxed{f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad \text{şi} \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B.}$$

Spunem că H **separă** A **şi** B **în sens strict** dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\boxed{f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \;\; \text{şi} \; f(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B.}$$

Din punct de vedere **geometric**, separarea exprimă faptul că A şi B se află **de o parte şi de alta a lui** H.

In final reamintim că o mulţime $A \subset E$ is **convexă** dacă

$$tx + (1-t)y \in A \quad \forall x, y \in A, \quad \forall t \in [0,1].$$

• **Teorema I.6 (Hahn-Banach, prima formă geometrică). Fie $A \subset E$ şi $B \subset E$ două mulţimi convexe, nevide şi disjuncte. Presupunem că A este deschisă. Atunci există un hiperplan închis care separă A şi B în sens larg.**

Demonstraţia teoremei I.6 face apel la următoarele două rezultate auxiliare.

Lema I.2. – Fie $C \subset E$ o mulţime deschisă şi convexă astfel încât $0 \in C$. Pentru orice $x \in E$ notăm

(8) $$p(x) = \operatorname{Inf}\{\alpha > 0\,; \alpha^{-1}x \in C\}$$

(p se numeşte funcţionala Minkowski asociată lui C).

Atunci p satisface (1), (2) şi proprietăţile

(9) **există o constantă M astfel încât** $0 \leq p(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in E$

(10) $$C = \{x \in E\,; p(x) < 1\}.$$

Demonstraţia lemei I.2. – Proprietatea (1) este evidentă.

Demonstraţia lui (9). Fie $r > 0$ astfel încât $B(0,r) \subset C$; este evident că

$$p(x) \leq \frac{1}{r}\|x\| \quad \forall x \in E.$$

Demonstraţia lui (10). Presupunem mai întâi că $x \in C$; deoarece C este deschisă, rezultă că $(1+\varepsilon)x \in C$ pentru orice $\varepsilon > 0$ suficient de mic. Deci $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Reciproc, dacă $p(x) < 1$, atunci există $\alpha \in (0,1)$ astfel încât $\alpha^{-1}x \in C$ şi deci $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in C$.

Demonstraţia lui (2). Fie $x, y \in E$ şi fie $\varepsilon > 0$. Folosind (1) şi (10) obţinem că $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$ şi $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Aşadar $\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ pentru orice $t \in [0,1]$. In particular, pentru $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$ obţinem $\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$. Folosind încă o dată (1) şi (10) rezultă că

$$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

adică (2).

Lema I.3. – Fie $C \subset E$ o mulţime convexă, deschisă, nevidă şi fie $x_0 \in E$ cu $x_0 \notin C$. Atunci există $f \in E'$ astfel încât $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in C$. In particular, hiperplanul $[f = f(x_0)]$ separă mulţimile $\{x_0\}$ şi C în sens larg.

Demonstraţia lemei I.3. – Prin translaţie putem întotdeauna presupune că $0 \in C$. Definim apoi funcţionala Minkowski p asociată lui C (vezi lema I.2). Considerăm subspaţiul liniar $G = \mathbf{R}x_0$ şi funcţionala liniară $g : G \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(tx_0) = t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Este evident că

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G$$

(se ia $x = tx_0$ şi se disting situaţiile $t > 0$ şi $t \leq 0$). Conform teoremei I.1, există o funcţională liniară f definită pe E care prelungeşte g astfel încât

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

In particular, avem $f(x_0) = 1$ şi f este continuă, conform (9). Pe de altă parte, deducem din (10) că $f(x) < 1$ pentru orice $x \in C$.

Demonstraţia teoremei I.6. – Fie $C = A - B$, deci C este convexă (verificare uşoară), C este deschisă (deoarece $C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$) şi $0 \notin C$ (pentru că $A \cap B = \emptyset$). Conform lemei I.3, există $f \in E'$ astfel încât

$$f(z) < 0 \quad \forall z \in C,$$

adică

$$f(x) < f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

Fixăm $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\mathrm{Sup}_{x \in A}\, f(x) \leq \alpha \leq \mathrm{Inf}_{y \in B}\, f(y).$$

Evident, hiperplanul de ecuaţie $[f = \alpha]$ separă mulţimile A şi B în sens larg.

• **Teorema I.7 (Hahn-Banach, a doua formă geometrică). – Fie $A \subset E$ şi $B \subset E$ două mulţimi convexe, nevide si disjuncte. Presupunem că A este închisă şi B este compactă. Atunci există un hiperplan închis care separă mulţimile A şi B în sens strict.**

Demonstraţie. – Pentru $\varepsilon > 0$ definim $A_\varepsilon = A + B(0,\varepsilon)$ şi $B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon)$. Mulţimile A_ε şi B_ε sunt convexe, deschise şi nevide. In plus, pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic, A_ε şi B_ε sunt disjuncte (dacă nu, există şirurile $\varepsilon_n \to 0$, $x_n \in A$ şi $y_n \in B$ astfel încât $\|x_n - y_n\| < 2\varepsilon_n$; am putea apoi extrage un subşir $y_{n_k} \to y \in A \cap B$). Conform teoremei I.6, există un hiperplan închis de ecuaţie $[f = \alpha]$ care separă mulţimile A_ε şi B_ε în sens larg. Avem aşadar

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon z) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z \in B(0,1).$$

Rezultă că

$$f(x) + \varepsilon\|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon\|f\|, \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

Deducem de aici că A şi B sunt separate în sens strict de hiperplanul $[f = \alpha]$ deoarece $\|f\| \neq 0$.

Remarca 4. – Fie $A \subset E$ şi $B \subset E$ două mulţimi convexe nevide astfel încât $A \cap B = \emptyset$. **Fără o ipoteză suplimentară** este în general imposibil de a separa mulţimile A şi B în sens larg printr-un hiperplan închis. Putem totuşi construi un exemplu în care A şi B sunt mulţimi convexe şi închise, nevide, disjuncte astfel încât nu există nici un hiperplan închis care separă A şi B în sens larg (a se vedea [EX]). Totuşi, dacă E este **finit dimensional**, atunci putem **întotdeauna** separa în sens larg două mulţimi A şi B convexe, nevide şi disjuncte (fără nici o ipoteză suplimentară!); vezi [EX].

Incheiem această secţiune cu un corolar **foarte util** atunci când dorim să arătăm că un subspaţiu vectorial este **dens**.

• **Corolarul I.8. – Fie $F \subset E$ un subspaţiu vectorial astfel că $\overline{F} \neq E$. Atunci există $f \in E', f \not\equiv 0$ astfel încât**

$$\langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in F.$$

DEMONSTRAŢIE. – Fie $x_0 \in E$ cu $x_0 \notin \overline{F}$. Aplicăm teorema I.7 cu $A = \overline{F}$ şi $B = \{x_0\}$. Există deci $f \in E'$, $f \not\equiv 0$ astfel încât hiperplanul de ecuaţie $[f = \alpha]$ separă în sens strict mulţimile $\overline{F}$ şi $\{x_0\}$. Aşadar

$$\langle f, x\rangle < \alpha < \langle f, x_0\rangle \quad \forall x \in F.$$

Rezultă că $\langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in F$, deoarece $\lambda\langle f, x\rangle < \alpha$ pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$.

• REMARCA 5. – Corolarul 1.8 este aplicat adesea pentru a arăta că un subspaţiu vectorial $F \subset E$ este **dens**. Pentru aceasta considerăm o funcţională liniară şi continuă astfel încât $f = 0$ pe F şi **demonstrăm** că f este identic nulă pe E.

I.3 Introducere în teoria funcţiilor convexe conjugate

Incepem cu câteva preliminarii despre funcţiile inferior semicontinue şi funcţiile convexe.

In această secţiune vom considera funcţii φ definite pe o mulţime E cu valori în $(-\infty, +\infty]$, deci φ poate lua valoarea $+\infty$ (dar valoarea $-\infty$ este exclusă). Notăm prin $D(\varphi)$ **domeniul** lui φ, adică

$$\boxed{D(\varphi) = \{x \in E\,;\ \varphi(x) < +\infty\}.}$$

Notaţie: Epigraful lui φ este mulţimea

$$\operatorname{epi}\varphi = \{[x, \lambda] \in E \times \mathbf{R}\,;\ \varphi(x) \le \lambda\}(^6).$$

Presupunem acum că E este un **spaţiu topologic**. Reamintim următoarea

Definiţie. – O funcţie $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ se numeşte **inferior semicontinuă (i.s.c.)** dacă pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$ mulţimea

$$[\varphi \le \lambda] = \{x \in E;\ \varphi(x) \le \lambda\}$$

[6]Insistăm asupra faptului că $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ şi că, în cazul nostru, λ nu poate lua valoarea ∞.

este închisă.

Prezentăm în continuare câteva proprietăţi ale funcţilor i.s.c. (vezi Choquet [1] sau Dixmier [1]):

(a) Dacă φ este i.s.c. atunci epi φ este închisă în $E \times \mathbf{R}$; şi reciproc.

(b) Dacă φ este i.s.c., atunci pentru orice $x \in E$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui x astfel încât

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) - \varepsilon \quad \forall y \in V;$$

şi reciproc.

In particular, dacă φ este i.s.c. şi (x_n) este un şir în E astfel încât $x_n \to x$, atunci

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

(c) Dacă φ_1 şi φ_2 sunt i.s.c. atunci $\varphi_1 + \varphi_2$ este i.s.c.

(d) Dacă $(\varphi_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii i.s.c. atunci **anvelopa superioară** a acestei familii este i.s.c., adică funcţia φ definită prin

$$\varphi(x) = \mathrm{Sup}_{i\in I}\, \varphi_i(x)$$

este i.s.c.

(e) Dacă E este **compactă** şi φ este i.s.c. atunci φ îşi atinge marginea inferioară în E.

Presupunem acum că E este un **spaţiu vectorial**. Reamintim

Definiţie. – O funcţie $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ se numeşte **convexă** dacă

$$\boxed{\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \quad \forall x, y \in E, \quad \forall t \in (0,1).}$$

Vom utiliza câteva proprietăţi elementare ale funcţiilor convexe:

(a) Dacă φ este o funcţie convexă, atunci epi φ este o mulţime convexă în $E \times \mathbf{R}$; şi reciproc.

(b) Dacă φ este o funcţie convexă, atunci, pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$ mulţimea $[\varphi \leq \lambda]$ este convexă; reciproca **nu** este adevărată.

(c) Dacă φ_1 şi φ_2 sunt convexe, atunci $\varphi_1 + \varphi_2$ este convexă.

(d) Dacă $(\varphi_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii convexe, atunci anvelopa superioară a acestei familii este, de asemenea, convexă.

Presupunem în cele ce urmează că E este un s.v.n.

Definiţie. – Fie $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ astfel încât $\varphi \not\equiv +\infty$ (adică $D(\varphi) \neq \emptyset$). Definim **funcţia conjugată** a lui φ prin $\varphi^* : E' \to (-\infty, +\infty]$ ([7])

$$\boxed{\varphi^*(f) = \mathrm{Sup}_{x \in E} \{\langle f, x\rangle - \varphi(x)\} \quad (f \in E').}$$

Observăm că φ^* este convexă şi i.s.c. pe E'. Intr-adevăr, pentru orice $x \in E$ **fixat**, aplicaţia $f \mapsto \langle f, x\rangle - \varphi(x)$ este convexă şi continuă (deci i.s.c.) pe E'. Rezultă că anvelopa superioară a acestor funcţii (când x parcurge E) este convexă şi i.s.c.

Propoziţia I.9. – Presupunem că $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ este convexă, i.s.c. şi $\varphi \not\equiv +\infty$. Atunci $\varphi^* \not\equiv +\infty$, şi, în particular, φ este mărginită inferior de o funcţie continuă afină.

Demonstraţie. – Fie $x_0 \in D(\varphi)$ şi fie $\lambda_0 < \varphi(x_0)$. Aplicăm teorema I.7 (Hahn-Banach, a doua formă geometrică) în spaţiul $E \times \mathbf{R}$ cu $A = \mathrm{epi}\,\varphi$ şi $B = \{[x_0, \lambda_0]\}$.

Deci există un hiperplan închis $H = [\Phi = \alpha]$ în $E \times \mathbf{R}$ care separă strict mulţimile A şi B. Observăm că aplicaţia $x \in E \mapsto \Phi([x, 0])$ este o funcţională liniară şi continuă pe E şi deci $\Phi([x, 0]) = \langle f, x\rangle$, pentru un anume $f \in E'$. Punând $k = \Phi([0, 1])$ avem

$$\Phi([x, \lambda]) = \langle f, x\rangle + k\lambda \quad \forall [x, \lambda] \in E \times \mathbf{R}.$$

Scriind că $\Phi > \alpha$ pe A şi $\Phi < \alpha$ pe B obţinem

$$\langle f, x\rangle + k\lambda > \alpha, \quad \forall [x, \lambda] \in \mathrm{epi}\,\varphi$$

şi

$$\langle f, x_0\rangle + k\lambda_0 < \alpha.$$

In particular, avem

$$\langle f, x\rangle + k\varphi(x) > \alpha \quad \forall x \in D(\varphi) \tag{11}$$

[7] φ^* se numeşte uneori transformata Legendre a lui φ.

şi deci
$$\langle f, x_0\rangle + k\varphi(x_0) > \alpha > \langle f, x_0\rangle + k\lambda_0.$$
Rezultă $k > 0$. Deducem din (11) că
$$\langle -\frac{1}{k} f, x\rangle - \varphi(x) < -\frac{\alpha}{k} \quad \forall x \in D(\varphi)$$
şi deci $\varphi^*(-\frac{1}{k} f) < +\infty$.

Definim acum, dacă $\varphi^* \not\equiv +\infty$, aplicaţia $\varphi^{**} : E'' \to (-\infty, +\infty]$ prin
$$\boxed{\varphi^{**}(x) = \mathrm{Sup}_{f\in E'} \{\langle f, x\rangle - \varphi^*(f)\} \quad (x \in E).}$$

• **Teorema I.10 (Fenchel-Moreau). – Presupunem că** $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ **este convexă, i.s.c. şi** $\varphi \not\equiv +\infty$**. Atunci** $\varphi^{**} = \varphi$**.**

Demonstraţie. – Procedăm în două etape:

Etapa 1: Presupunem, în plus, că $\varphi \geq 0$ şi afirmăm că $\varphi^{**} = \varphi$. Observăm mai întâi că $\varphi^{**} \leq \varphi$; într-adevăr, din definiţia lui φ^*, este evident că
$$\langle f, x\rangle - \varphi^*(f) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E'.$$
Pentru a demonstra că $\varphi^{**} = \varphi$ raţionăm prin absurd şi presupunem că $\varphi^{**}(x_0) < \varphi(x_0)$, pentru un anume $x_0 \in E$. Este posibil să avem $\varphi(x_0) = +\infty$, dar întotdeauna $\varphi^{**}(x_0) < +\infty$. Aplicăm teorema I.7 (Hahn-Banach, a doua formă geometrică) în spaţiul $E \times \mathbf{R}$ cu $A = \mathrm{epi}\,\varphi$ şi $B = [x_0, \varphi^{**}(x_0)]$. Aşadar, există—ca în demonstraţia propoziţiei I.9 –$f \in E', k \in \mathbf{R}$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\langle f, x\rangle + k\lambda > \alpha \quad \forall [x, \lambda] \in \mathrm{epi}\,\varphi \tag{12}$$

$$\langle f, x_0\rangle + k\varphi^{**}(x_0) < \alpha. \tag{13}$$

Rezultă $k \geq 0$ (în (12) fixăm $x \in D(\varphi)$ şi luăm $\lambda = n \to +\infty$). [Aici nu putem concluziona –ca în demonstraţia propoziţiei I.9 –că avem $k > 0$; am putea avea $k = 0$ – care corespunde unui hiperplan "vertical" H în $E \times \mathbf{R}$].

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece $\varphi \geq 0$ avem, conform (12),

$$\langle f, x\rangle + (k+\varepsilon)\varphi(x) \geq \alpha \quad \forall x \in D(\varphi).$$

Deci

$$\varphi^*\left(-\frac{f}{k+\varepsilon}\right) \leq -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Conform definiţiei lui $\varphi^{**}(x_0)$ rezultă că

$$\varphi^{**}(x_0) \geq \langle -\frac{f}{k+\varepsilon}, x_0\rangle - \varphi^*\left(-\frac{f}{k+\varepsilon}\right) \geq \langle -\frac{f}{k+\varepsilon}, x_0\rangle + \frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Prin urmare

$$\langle f, x_0\rangle + (k+\varepsilon)\varphi^{**}(x_0) \geq \alpha \quad \forall \varepsilon > 0$$

care contrazice (13).

Etapa 2: Cazul general. Fixăm $f_0 \in D(\varphi^*)$ ($D(\varphi^*) \neq \emptyset$, conform propoziţiei I.9) şi definim

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - \langle f_0, x\rangle + \varphi^*(f_0).$$

Deci $\overline{\varphi}$ este convexă, i.s.c., $\overline{\varphi} \not\equiv +\infty$ şi $\overline{\varphi} \geq 0$. Ştim din Etapa 1 că $(\overline{\varphi})^{**} = \overline{\varphi}$. Calculăm acum $(\overline{\varphi})^*$ şi $(\overline{\varphi})^{**}$. Avem

$$(\overline{\varphi})^*(f) = \varphi^*(f + f_0) - \varphi^*(f_0)$$

şi

$$(\overline{\varphi})^{**}(x) = \varphi^{**}(x) - \langle f_0, x\rangle + \varphi^*(f_0).$$

Rezultă că $\varphi^{**} = \varphi$.

Un exemplu. – Considerăm $\varphi(x) = \|x\|$. Este uşor de verificat că

$$\varphi^*(f) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \|f\| \leq 1 \\ +\infty & \text{dacă } \|f\| > 1. \end{cases}$$

Deci

$$\varphi^{**}(x) = \operatorname{Sup}_{\substack{\|f\|\leq 1 \\ f \in E'}} \langle f, x\rangle.$$

Scriind egalitatea

$$\varphi^{**} = \varphi$$

regăsim (parţial) corolarul I.4.

Incheiem acest capitol cu o altă proprietate a funcţiilor convexe conjugate.

$\star$ **Teorema I.11 (Fenchel-Rockafellar). – Fie φ şi ψ funcţii convexe. Presupunem că există $x_0 \in D(\varphi) \cap D(\psi)$ astfel încât φ este continuă în x_0. Atunci**

$$\mathrm{Inf}_{x\in E}\left\{\varphi(x) + \psi(x)\right\} = \mathrm{Sup}_{f\in E'}\left\{-\varphi^*(-f) - \psi^*(f)\right\}$$

$$= \mathrm{Max}_{f\in E'}\{-\varphi^*(-f) - \psi^*(f)\}.$$

Demonstraţia teoremei I.11 face apel la

Lema I.4. – Fie $C \subset E$ o mulţime convexă; atunci $\mathrm{Int}\, C$ (8) este o mulţime convexă. Dacă, în plus, $\mathrm{Int}\, C \neq \emptyset$ atunci

$$\overline{C} = \overline{\mathrm{Int}\, C}.$$

Pentru demonstraţia lemei I.4 cităm L. Schwartz [2], Bourbaki [1].

Demonstraţia teoremei I.11. – Fie

$$a = \mathrm{Inf}_{x\in E}\left\{\varphi(x) + \psi(x)\right\}$$

$$b = \mathrm{Sup}_{f\in E'}\left\{-\varphi^*(-f) - \psi^*(f)\right\}.$$

Se verifică cu uşurinţă că $b \leq a$. Dacă $a = -\infty$, concluzia teoremei I.11 este evidentă.

Presupunem acum că $a \in \mathbf{R}$. Notăm

$$C = \mathrm{epi}\, \varphi.$$

Este evident că $\mathrm{Int}\, C \neq \emptyset$ (deoarece φ este continuă în x_0). Aplicăm acum teorema (Hahn-Banach, prima formă geometrică) cu $A = \mathrm{Int}\, C$ şi

$$B = \{[x, \lambda] \in E \times \mathbf{R};\ \lambda \leq a - \psi(x)\}.$$

---

[8] $\mathrm{Int}\, C$ reprezintă interiorul lui C.

A şi B sunt convexe şi nevide. Mai mult, $A \cap B = \emptyset$; într-adevăr, dacă $[x, \lambda] \in A$, atunci

$$\lambda > \varphi(x) \geq a - \psi(x)$$

(din definiţia lui a) – şi deci $[x, \lambda] \notin B$. Există deci un hiperplan închis H care separă A şi B în sens larg. Rezultă că H separă în sens larg şi mulţimile $\overline{A}$ şi B, conform lemei I.4. Deci există $f \in E'$, $k \in \mathbf{R}$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât hiperplanul $H = [\Phi = \alpha]$ separă în $E \times \mathbf{R}$ mulţimile C şi B, unde

$$\Phi([x, \lambda]) = \langle f, x \rangle + k\lambda \quad \forall [x, \lambda] \in E \times \mathbf{R}.$$

Deci

$$(14) \qquad \langle f, x \rangle + k\lambda \geq \alpha \quad \forall [x, \lambda] \in C,$$

$$(15) \qquad \langle f, x \rangle + k\lambda \leq \alpha \quad \forall [x, \lambda] \in B.$$

Alegând $x = x_0$ şi luând $\lambda \to +\infty$ în (14) observăm că avem $k \geq 0$. Afirmăm că, de fapt

$$(16) \qquad k > 0.$$

Reamintim că $\Phi \neq 0$, ceea ce înseamnă că $\|f\| + |k| \neq 0$. Presupunem, prin absurd, $k = 0$. Din (14) şi (15) rezultă că

$$\langle f, x \rangle \geq \alpha \quad \forall x \in D(\varphi)$$

$$\langle f, x \rangle \leq \alpha \quad \forall x \in D(\psi).$$

Dar $B(x_0, \varepsilon_0) \subset D(\varphi)$ pentru $\varepsilon_0 > 0$ suficient de mic, deci

$$\langle f, x_0 + \varepsilon_0 z \rangle \geq \alpha \quad \forall z \in B(0, 1).$$

Rezultă că $\langle f, x_0 \rangle \geq \alpha + \varepsilon_0 \|f\|$. Pe de altă parte,

$$\langle f, x_0 \rangle \leq \alpha \qquad \text{deoarece } \; x_0 \in D(\psi).$$

Deci $f = 0$, ceea ce este absurd (deoarece $k = 0$). Am demonstrat astfel (16).

Din (14) şi (15) deducem că

$$\varphi^*\left(-\frac{f}{k}\right) \leq -\frac{\alpha}{k}$$

şi

$$\psi^*\left(\frac{f}{k}\right) \leq \frac{\alpha}{k} - a$$

deci

$$-\varphi^*\left(-\frac{f}{k}\right) - \psi^*\left(\frac{f}{k}\right) \geq a.$$

Pe de altă parte (conform definiţiei lui b),

$$-\varphi^*\left(-\frac{f}{k}\right) - \psi^*\left(\frac{f}{k}\right) \leq b.$$

Deducem că

$$a = b = -\varphi^*\left(-\frac{f}{k}\right) - \psi^*\left(\frac{f}{k}\right).$$

Un exemplu. – Fie $K \subset E$ o mulţime convexă şi nevidă. Fie

$$I_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in K \\ +\infty & \text{dacă } x \notin K. \end{cases}$$

I_K se numeşte **funcţia indicatoare** a lui K. Observăm că I_K este convexă, i.s.c şi $I_K \not\equiv +\infty$. Funcţia conjugată $(I_K)^*$ se numeşte **funcţia de suport** a lui K. Arătăm că pentru orice $x_0 \in E$ avem

(17) $$\operatorname{dist}(x_0, K) = \operatorname{Inf}_{x\in K}\|x - x_0\| = \operatorname{Sup}_{\substack{f\in E' \\ \|f\|\leq 1}} \{\langle f, x_0\rangle - I_K^*(f)\}.$$

Intr-adevăr, avem

$$\operatorname{Inf}_{x\in K}\|x - x_0\| = \operatorname{Inf}_{x\in E}\{\varphi(x) + \psi(x)\}$$

cu

$$\varphi(x) = \|x - x_0\| \quad \text{şi} \quad \psi(x) = I_K(x).$$

Aplicând teorema I.11 obţinem (17).

Remarca 6. – Relaţia (17) poate oferi informaţii interesante în cazul în care $\text{Inf}_{x \in K} \|x - x_0\|$ **nu** este atins (a se vedea [EX]).

Teoria suprafeţelor minimale oferă un cadru foarte instructiv în care **problema iniţială** (adică $\text{Inf}_{x \in E}\{\varphi(x) + \psi(x)\}$) nu are (în general) soluţie, în timp ce **problema duală** (adică $\text{Max}_{f \in E'}\{-\varphi^*(-f) - \psi^*(f)\}$) are o soluţie; vezi Ekeland–Temam [1].

I.4 Comentarii asupra capitolului I

1) Generalizări şi variante ale teoremelor Hahn-Banach.

Prima formă geometrică a teoremei Hahn-Banach se extinde la spaţii vectoriale topologice generale. A doua formă geometrică se extinde la spaţii **local convexe** – spaţii care joacă un rol important, de pildă în **teoria distribuţiilor** (vezi L. Schwartz [1]). Cititorul interesat poate consulta şi N. Bourbaki [1], Kelley-Namioka [1], G. Choquet [2] (Vol. 2) şi Taylor-Lay [1].

2) Aplicaţii ale teoremelor Hahn-Banach.

Teoremele Hahn-Banach au aplicaţii numeroase şi variate. Iată două exemple:

a) *Teorema Krein-Milman*

Reamintim mai întâi câteva definiţii. Fie E un s.v.n. şi fie $A \subset E$. **Anvelopa convexă închisă** a lui A—notată prin $\overline{\text{conv } A}$—este cea mai mică mulţime convexă şi închisă care conţine A. Fie $K \subset E$ o mulţime convexă. Spunem că $x \in K$ este **extremal** dacă x nu poate fi scris ca o combinaţie convexă de două puncte $x_0, x_1 \in K$, adică $x \neq (1-t)x_0 + tx_1$ cu $t \in (0, 1)$, şi $x_0 \neq x_1$.

• **Teorema I.12 (Krein-Milman).** – **Fie $K \subset E$ o mulţime convexă şi compactă. Atunci K coincide cu anvelopa convexă şi închisă a punctelor sale extremale.**

Teorema Krein-Milman are numeroase aplicaţii şi generalizări (teorema de reprezentare integrală a lui Choquet, teorema lui Bochner, teorema lui Bernstein, etc.). Asupra acestui subiect se pot consulta Bourbaki [1], Choquet [2] (Vol. 2), Phelps [1], Dunford-Schwartz [1] (Vol. 1), Rudin [1], Larsen [1], Kelley-Namioka [1], Edwards [1], Dellacherie-Meyer [1] (Cap. X), Taylor-Lay [1], Diestel [2] şi [EX].

b) *Teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale*

Menţionăm, în particular, **existenţa unei soluţii elementare** pentru orice operator diferenţial $P(D)$ cu coeficienţi constanţi (teorema Malgrange–Ehrenpreis); vezi Hörmander [1], Yosida [1], Rudin [1], Treves [2], Reed-Simon [1] (Vol. 2). In acelaşi spirit, menţionăm demonstraţia **existenţei unei funcţii Green** pentru Laplacian prin metoda lui Garabedian şi Lax; vezi Garabedian [1].

3) Funcţii convexe.

Teoria funcţiilor convexe şi **problemele de dualitate** s-au dezvoltat **considerabil** în ultimele decenii; vezi Moreau [1], Rockafellar [1], Ekeland-Temam [1]. Printre aplicaţii cităm:

(a) *Teoria jocurilor, economie, optimizare, programare convexă*; vezi Aubin [1], [2], Karlin [1], Balakrishnan [1], Barbu-Precupanu [1], Moulin-Fogelman [1], Stoer-Witzgall [1].

(b) *Mecanică*; vezi Moreau [2], Duvaut-Lions [1], Germain [1], articolul Temam-Strang [1] şi comentariile lui Germain care urmează după acest articol. Notăm şi utilizarea dualităţii într-o problemă ce intervine în *fizica plasmei* (vezi Damlamian [1] şi referinţele citate).

(c) *Teoria operatorilor monotoni şi a semigrupurilor neliniare*, vezi Brezis [1].

(d) Probleme variaţionale legate de *soluţii periodice pentru sistemele hamiltoniene şi ecuaţiile neliniare ale coardelor vibrante*; vezi lucrările recente ale lui Clarke, Ekeland, Lasry, Brezis, Coron şi Nirenberg (cităm Clarke-Ekeland [1], Brezis-Coron-Nirenberg [1] şi referinţele acestor articole).

4) Prelungirea operatorilor liniari şi continui.

Fie E şi F spaţii Banach şi fie $G \subset E$ un subspaţiu vectorial închis. Fie $g : G \to F$ un operator liniar şi continuu. Ne putem pune întrebarea de a şti dacă există un operator liniar şi continuu $f : E \to F$ care prelungeşte g. Corolarul I.2 rezolvă această problemă doar dacă $F = \mathbf{R}$. Răspunsul este afirmativ în **unele cazuri**:

a) Dacă $\dim F < \infty$, se poate alege o bază în F şi aplicăm corolarul I.2 fiecărei componente a lui g.

b) Dacă G admite un suplement topologic (vezi capitolul II); aceasta se întâmplă, de exemplu, dacă $\dim G < \infty$ sau dacă codim $G < \infty$ sau dacă E este un spaţiu Hilbert. Răspunsul este **negativ** în cazul general, chiar dacă E şi F sunt spaţii reflexive (vezi [EX]).

Bineînţeles, ne putem întreba dacă există o prelungire f a lui g astfel încât $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|g\|_{\mathcal{L}(G,F)}$. Aceasta este o problemă dificilă.

Capitolul II

TEOREMELE LUI BANACH-STEINHAUS ŞI A GRAFICULUI ÎNCHIS. RELAŢII DE ORTOGONALITATE. OPERATORI NEMĂRGINIŢI. NOŢIUNEA DE ADJUNCT. CARACTERIZAREA OPERATORILOR SURJECTIVI

II.1 Lema lui Baire

Următoarea lemă este un rezultat clasic ce joacă un rol esenţial în demonstraţiile din capitolul II.

Lema II.1 (Baire). – **Fie** X **un spaţiu metric complet. Fie** $(X_n)_{n\geq 1}$ **un şir de mulţimi închise în** X. **Presupunem că**

$$\operatorname{Int} X_n = \emptyset \qquad \textbf{pentru orice } n \geq 1.$$

Atunci

$$\operatorname{Int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \emptyset.$$

Remarca 1. – Lema lui Baire este în general utilizată în forma următoare. Fie X un spaţiu metric complet nevid. Fie $(X_n)_{n\geq 1}$ un şir de mulţimi închise astfel încât

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Atunci există n_0 astfel încât $\operatorname{Int} X_{n_0} \neq \emptyset$.

Demonstraţie. – Fie $O_n = X_n^c$. Rezultă că O_n este o mulţime deschisă şi densă. Este suficient să demonstrăm că $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ este densă în X. Fie ω o mulţime deschisă şi nevidă în X; vom demonstra că $\omega \cap G \neq \emptyset$.

Notăm

$$B(x,r) = \{y \in X;\ d(y,x) < r\}.$$

Alegem $x_0 \in \omega$ şi $r_0 > 0$ astfel încât

$$\overline{B(x_0, r_0)} \subset \omega.$$

Alegem apoi $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ şi $r_1 > 0$ astfel încât

$$\begin{cases} \overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 \\ 0 < r_1 < \dfrac{r_0}{2}. \end{cases}$$

Această alegere este posibilă deoarece O_1 este deschisă şi densă. Construim astfel prin recurenţă două şiruri (x_n) şi (r_n) astfel încât

$$\begin{cases} \overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1}, \quad \forall n \geq 0 \\ 0 < r_{n+1} < \dfrac{r_n}{2}. \end{cases}$$

Rezultă că (x_n) este un şir Cauchy; fie $x_n \to \ell$. Intrucât $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$ pentru orice $n \geq 0$ şi pentru orice $p \geq 0$, obţinem prin trecere la limită (când $p \to \infty$):

$$\ell \in \overline{B(x_n, r_n)}, \quad \forall n \geq 0.$$

In particular, $\ell \in \omega \cap G$.

II.2 Teorema lui Banach-Steinhaus

Notaţie. – Fie E şi F două spaţii vectoriale normate. Notăm prin $\mathcal{L}(E,F)$ spaţiul operatorilor **liniari** şi **continui** de la E în F înzestrat cu norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \operatorname{Sup}_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\|.$$

Notăm $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

• **Teorema II.1 (Banach-Steinhaus). – Fie E şi F două spaţii Banach. Fie $(T_i)_{i\in I}$ o familie (nu neapărat numărabilă) de operatori liniari şi continui de la E în F. Presupunem că**

$$\text{Sup}_{i\in I}\|T_i x\| < \infty \quad \forall x \in E. \tag{1}$$

Atunci

$$\text{Sup}_{i\in I}\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty. \tag{2}$$

Cu alte cuvinte, există o constantă c astfel încât

$$\|T_i x\| \le c\|x\| \quad \forall x \in E, \quad \forall i \in I.$$

Remarca 2. – In literatura americană teorema II.1 este adesea cunoscută sub numele de **Principiul Mărginirii Uniforme**, ceea ce exprimă cât se poate de bine conţinutul rezultatului: se deduce o **estimare uniformă** pornind de la **estimări punctuale**.

Demonstraţie. – Pentru fiecare număr întreg $n \ge 1$, fie

$$X_n = \{x \in E; \quad \forall i \in I, \ \|T_i x\| \le n\}.$$

Deci X_n este închisă şi, conform (1),

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E.$$

Din lema lui Baire rezultă că $\text{Int}\,(X_{n_0}) \neq \emptyset$, pentru un anumit $n_0 \ge 1$. Fie $x_0 \in E$ şi $r > 0$ astfel încât $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$. Avem

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \le n_0 \quad \forall i \in I, \quad \forall z \in B(0,1).$$

De aici rezultă că

$$r\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le n_0 + \|T_i x_0\|$$

ceea ce implică (2).

Prezentăm în cele ce urmează câteva consecinţe imediate ale teoremei lui Banach-Steinhaus.

Corolarul II.2. – Fie E şi F două spaţii Banach. Fie (T_n) un şir de operatori liniari şi continui de la E în F astfel încât pentru orice $x \in E$, $T_n x$ converge (când $n \to \infty$) la o limită notată cu Tx.

Atunci

(a) $\quad \mathrm{Sup}_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$

(b) $\quad T \in \mathcal{L}(E, F)$

(c) $\quad \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Demonstraţie. – (a) rezultă direct din teorema II.1. Există deci o constantă c astfel încât

$$\|T_n x\| \le c\|x\| \quad \forall n, \quad \forall x \in E.$$

Prin trecere la limită obţinem

$$\|Tx\| \le c\|x\| \quad \forall x \in E.$$

Pe de altă parte, este evident că T este liniar, de unde obţinem (b).

Pe de altă parte,

$$\|T_n x\| \le \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\| \quad \forall x \in E,$$

de unde rezultă (c).

• **Corolarul II.3. – Fie G un spaţiu Banach şi fie B o submulţime a lui G. Presupunem că pentru orice**

(3) $\quad f \in G'$, **mulţimea** $f(B) = \bigcup_{x\in B} \langle f, x\rangle$ **este mărginită (în R)**.

Atunci

(4) $\quad B$ **este mărginită.**

Demonstraţie. – Aplicăm teorema II.1 cu $E = G'$, $F = \mathbf{R}$ şi $I = B$. Pentru fiecare $b \in B$, fie

$$T_b(f) = \langle f, b\rangle, \quad f \in E = G'.$$

Din ipoteză rezultă că

$$\mathrm{Sup}_{b\in B}|T_b(f)| < \infty \quad \forall f \in E.$$

Conform teoremei II.1, există o constantă c astfel încât

$$|\langle f, b\rangle| \leq c\|f\| \quad \forall f \in G' \quad \forall b \in B.$$

Deci (folosind corolarul I.4)

$$\|b\| \leq c \quad \forall b \in B.$$

Remarca 3. – Pentru a verifica faptul că o mulţime este mărginită este suficient de a o "privi" prin comportamentul tuturor formelor liniare şi continue; aşa procedăm în general în dimensiune finită utilizând componentele unei baze. Corolarul II.3 înlocuieşte în dimensiune infinită apelarea la o bază. Putem exprima concluzia corolarului II.3 spunând că "slab închisă" $\Longrightarrow$ "tare închisă".

Avem următorul enunţ "dual" al corolarului II.3:

Corolarul II.4. – Fie G un spaţiu Banach şi fie B' o submulţime a lui G'. Presupunem că pentru orice

(5) $\quad x \in G$ **mulţimea** $\langle B', x\rangle = \bigcup_{f \in B'} \langle f, x\rangle$ **este mărginită (în R).**

Atunci

(6) $\quad B'$ **este mărginită.**

Demonstraţie. – Aplicăm teorema II.1 pentru $E = G$, $F = \mathbf{R}$ şi $I = B'$. Pentru orice $b \in B'$, fie

$$T_b(x) = \langle b, x\rangle \ \ (x \in G = E).$$

Deducem de aici şi din ipoteză că există o constantă c astfel încât

$$|\langle b, x\rangle| \leq c\|x\| \quad \forall b \in B', \quad \forall x \in G.$$

Deci (folosind definiţia normei duale)

$$\|b\| \leq c \quad \forall b \in B'.$$

II.3 Teorema aplicaţiei deschise şi teorema graficului închis

Rezultatele fundamentale următoare sunt datorate lui Banach.

• **Teorema II.5 (Teorema aplicaţiei deschise).** – **Fie** E **şi** F **două spaţii Banach şi fie** T **un operator liniar, continuu şi surjectiv de la** E **în** F**.**

Atunci există o constantă $c > 0$ **astfel încât**

$$T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c). \tag{7}$$

Remarca 4. – Proprietatea (7) antrenează faptul că T **transformă orice deschis din** E **într-un deschis din** F (de unde numele acestei teoreme!). Intr-adevăr, fie U o mulţime deschisă din E; să arătăm că $T(U)$ este deschisă. Fie $y_0 \in T(U)$, deci $y_0 = Tx_0$, cu $x_0 \in U$. Fie $r > 0$ astfel încât $B(x_0, r) \subset U$, adică $x_0 + B(0,r) \subset U$. Rezultă că

$$y_0 + T(B(0,r)) \subset T(U).$$

Deci, din (7),

$$T(B(0,r)) \supset B(0,rc)$$

şi, în consecinţă,

$$B(y_0, rc) \subset T(U).$$

Din teorema II.5 deducem imediat

• **Corolarul II.6.** – **Fie** E **şi** F **spaţii Banach şi fie** T **un operator liniar, continuu şi bijectiv de la** E **în** F**. Atunci** T^{-1} **este continuu de la** F **în** E**.**

Demonstraţia corolarului II.6. – Relaţia (7) exprimă faptul că pentru orice $x \in E$ cu $\|Tx\| < c$, avem $\|x\| < 1$. Prin omogenitate rezultă că

$$\|x\| \leq \frac{1}{c}\|Tx\| \qquad \forall x \in E,$$

deci T^{-1} este continuu.

• Remarca 5. – Fie E un spaţiu vectorial înzestrat cu două norme $\|x\|_1$ şi $\|x\|_2$. Presupunem că E înzestrat cu **fiecare** dintre aceste norme este un spaţiu Banach. Presupunem în plus că există o constantă $C \geq 0$ astfel încât

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

Atunci există o constantă $c > 0$ astfel încât

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \quad \forall x \in E.$$

Altfel spus, cele două norme sunt **echivalente**. Pentru aceasta este suficient să aplicăm corolarul II.6 cu

$$E = (E, \| \ \|_1), \quad F = (E, \| \ \|_2) \quad \text{şi} \quad T = \text{Id}.$$

Demonstraţia teoremei II.5. – Demonstraţia se face în două etape:

Prima etapă. – Fie T un operator liniar şi surjectiv de la E în F. Atunci există o constantă $c > 0$ astfel încât

$$\overline{T(B(0,1))} \supset B(0,2c). \tag{8}$$

Demonstraţie. – Fie $X_n = n\overline{T(B(0,1))}$. Deoarece T este surjectiv, avem $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = F$ şi, conform lemei lui Baire, există n_0 astfel încât $\text{Int}\,(X_{n_0}) \neq \emptyset$. Rezultă că

$$\text{Int}\,\overline{[T(B(0,1))]} \neq \emptyset.$$

Fie $c > 0$ şi $y_0 \in F$ astfel încât

$$B(y_0, 4c) \subset \overline{T(B(0,1))}. \tag{9}$$

In particular, $y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$ şi, prin simetrie,

$$-y_0 \in \overline{T(B(0,1))}. \tag{10}$$

Adunând (9) şi (10) obţinem

$$B(0,4c) \subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))}.$$

In sfârşit, deoarece $\overline{T(B(0,1))}$ este convexă, avem

$$\overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))} = 2\overline{T(B(0,1))},$$

de unde rezultă (8).

Etapa a doua. – Presupunem că T este un operator liniar şi continuu de la E în F care verifică relaţia (8). Atunci avem

$$T(B(0,1)) \supset B(0,c). \tag{11}$$

DEMONSTRAŢIE. – Fixăm $y \in F$ cu $\|y\| < c$. Căutăm $x \in E$ astfel încât

$$\|x\| < 1 \quad \text{şi} \quad Tx = y.$$

Conform (8), ştim că

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in E \text{ cu } \|z\| < \frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad \|y - Tz\| < \varepsilon. \tag{12}$$

Alegând $\varepsilon = c/2$ obţinem $z_1 \in E$ astfel încât

$$\|z_1\| < \frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad \|y - Tz_1\| < \frac{c}{2}.$$

Cu aceeaşi construcţie aplicată lui $y - Tz_1$ (în locul lui y) şi cu $\varepsilon = c/4$, obţinem $z_2 \in E$ astfel încât

$$\|z_2\| < \frac{1}{4} \quad \text{şi} \quad \|(y - Tz_1) - Tz_2\| < \frac{c}{4}.$$

Prin recurenţă construim astfel un şir (z_n) astfel încât

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{şi} \quad \|y - T(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)\| < \frac{c}{2^n} \quad \forall n.$$

Deci şirul $x_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ este un şir Cauchy. Fie $x_n \to x$. Evident, $\|x\| < 1$ şi $y = Tx$ (deoarece T este continuu).

• **Teorema II.7 (Teorema graficului închis). – Fie E şi F spaţii Banach. Fie T un operator liniar de la E în F. Presupunem că graficul lui T, $G(T)$, este închis în $E \times F$. Atunci**

$$T \textbf{ este continuu}.$$

REMARCA 6. – Bineînţeles, reciproca este adevărată, pentru că orice aplicaţie continuă (liniară sau neliniară) are graficul închis.

DEMONSTRAŢIA TEOREMEI II.7. – Aplicăm remarca 5. Considerăm pe E normele

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F \ (^1) \quad \text{şi} \quad \|x\|_2 = \|x\|_E.$$

Cum $G(T)$ este închis, rezultă că E înzestrat cu norma $\| \ \|_1$ este un spaţiu Banach. Pe de altă parte, $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. In consecinţă, cele două norme sunt echivalente, deci există o constantă $c > 0$ astfel încât $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$. Deci $\|Tx\|_F \leq c\|x\|_E$.

II.4 ⋆ Suplementul topologic. Operatori inversabili la dreapta (resp. la stânga).

Incepem prin a descrie câteva proprietăţi geometrice ale subspaţiilor **închise** ale unui spaţiu Banach, care rezultă din teorema aplicaţiei deschise.

⋆ **Teorema II.8. – Fie E un spaţiu Banach. Fie G şi L două subspaţii vectoriale închise astfel încât**

$$G + L \quad \textbf{este închis.}$$

Atunci există o constantă $C \geq 0$ astfel încât

$$(13) \qquad \begin{cases} \textbf{orice } z \in G + L \textbf{ admite o descompunere de forma} \\ z = x + y \textbf{ cu } x \in G, y \in L, \|x\| \leq C\|z\| \textbf{ şi } \|y\| \leq C\|z\|. \end{cases}$$

DEMONSTRAŢIE. – Considerăm spaţiul produs $G \times L$ înzestrat cu norma

$$\| \, [x, y] \, \| = \|x\| + \|y\|$$

şi spaţiul $G + L$ cu norma indusă de E. Aplicaţia $T : G \times L \to G + L$ definită prin $T[x, y] = x + y$ este continuă, liniară şi surjectivă. Conform teoremei aplicaţiei deschise, există o constantă $c > 0$ astfel încât orice

[1]Această normă se numeşte **norma grafului.**

$z \in G + L$ cu $\|z\| < c$ se poate scrie sub forma $z = x + y$, cu $x \in G$, $y \in L$ şi $\|x\| + \|y\| < 1$. Prin omogenitate, orice $z \in G + L$ se scrie

$$z = x + y \text{ cu } x \in G, y \in L \text{ şi } \|x\| + \|y\| \leq \frac{1}{c} \|z\|.$$

$\star$ **Corolarul II.9. – Presupunem satisfăcute ipotezele teoremei II.8. Atunci există o constantă C astfel încât**

$$\text{dist}\,(x, G \cap L) \leq C[\text{dist}\,(x, G) + \text{dist}\,(x, L)] \quad \forall x \in E. \tag{14}$$

Demonstraţie. – Fie $x \in E$ şi $\varepsilon > 0$. Atunci există $a \in G$ şi $b \in L$ astfel încât

$$\|x - a\| \leq \text{dist}\,(x, G) + \varepsilon, \quad \|x - b\| \leq \text{dist}\,(x, L) + \varepsilon.$$

Proprietatea (13) aplicată lui $z = a - b$ arată că există $a' \in G$ şi $b' \in L$ astfel încât

$$a - b = a' + b',\ \|a'\| \leq C\|a - b\|,\ \|b'\| \leq C\|a - b\|.$$

Rezultă că $a - a' \in G \cap L$ şi

$$\begin{aligned} \text{dist}\,(x, G \cap L) \ &\leq \|x - (a - a')\| \leq \|x - a\| + \|a'\| \\ &\leq \|x - a\| + C\|a - b\| \leq \|x - a\| + \\ &C(\|x - a\| + \|x - b\|) \\ &\leq (1 + C)[\text{dist}\,(x, G) + \text{dist}\,(x, L)] + (1 + 2C)\varepsilon. \end{aligned}$$

Deducem de aici relaţia (14) trecând la limită cu $\varepsilon \to 0$.

Remarca 7. – Reciproca corolarului II.9 este adevărată: dacă G şi L sunt subspaţii închise care verifică (14), atunci $G + L$ este închis (vezi [EX]).

Definiţie. – Fie $G \subset E$ un subspaţiu **închis** al unui spaţiu Banach E. Un subspaţiu $L \subset E$ se numeşte **suplement topologic** al lui G dacă:
(i) L este **închis**
(ii) $G \cap L = \{0\}$ şi $G + L = E$.

In acest caz, orice $z \in E$ se scrie în mod unic sub forma $z = x + y$, cu $x \in G$ şi $y \in L$. Rezultă din teorema II.8 că **proiectorii** $z \longmapsto x$ şi $z \longmapsto y$ sunt operatori liniari şi **continui**. (Această proprietate ar putea servi ca definiţie a suplementului topologic.)

Exemple:

1) Orice subspaţiu **finit dimensional** G admite un suplement topologic. Intr-adevăr, fie e_1, $e_2, \ldots, e_n$ o bază a lui G. Orice $x \in G$ se poate scrie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Fie $\varphi_i(x) = x_i$. Prelungim fiecare funcţională φ_i la o funcţională liniară şi continuă $\tilde{\varphi}_i$ definită pe E (conform teoremei Hahn-Banach, forma analitică, mai precis corolarul I.2). Se verifică cu uşurinţă că $L = \bigcap_{i=1}^{n} (\tilde{\varphi}_i)^{-1}(0)$ este un suplement topologic al lui G.

2) Orice subspaţiu închis G de **codimensiune finită** admite un suplement topologic. Intr-adevăr, este suficient să alegem orice suplement algebric al lui G. Acesta este automat închis, fiind de dimensiune finită.

Iată un exemplu tipic care ilustrează această situaţie. Fie $N \subset E'$ un subspaţiu de dimensiune p. Atunci

$$G = \{x \in E;\ \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall f \in N\}$$

este un subspaţiu închis de codimensiune p. Intr-adevăr, fie $f_1, f_2, \ldots, f_p$ o bază a lui N. Atunci există $e_1, e_2, \ldots, e_p \in E$ astfel încât

$$\langle f_i, e_j\rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, p.$$

[Considerăm aplicaţia $\vec{\Phi} : E \to \mathbf{R}^p$ definită prin

$$x \in E \longmapsto \vec{\Phi}(x) = (\langle f_1, x\rangle, \langle f_2, x\rangle, \ldots, \langle f_p, x\rangle)$$

Aplicaţia $\vec{\Phi}$ este surjectivă – în caz contrar, conform teoremei Hahn-Banach (a doua formă geometrică), există $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \neq 0$ astfel încât

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\Phi}(x) = \langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i, x\rangle = 0 \quad \forall x \in E,$$

ceea ce este absurd].

Este uşor de verificat că vectorii $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ sunt liniar independenţi şi că spaţiul vectorial generat de vectorii $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ este un suplement topologic al lui G.

3) Intr-un spaţiu **Hilbert** orice subspaţiu închis G admite un suplement topologic (vezi capitolul V.2).

REMARCA 8. – Chiar în spaţiile reflexive se pot construi subspaţii închise care nu posedă nici un suplement topologic. Un rezultat remarcabil al lui Lindenstrauss şi Tzafriri [1] afirmă că **orice** spaţiu Banach care nu este izomorf cu un spaţiu Hilbert are subspaţii închise fără suplement topologic.

Fie T un operator liniar, continuu şi surjectiv de la E în F. Teorema aplicaţiei deschise arată că

$$\forall f \in F, \quad \exists x \in E \quad \text{astfel încât} \quad Tx = f \quad \text{şi} \quad \|x\| \leq C\|f\|.$$

Este natural să ne întrebăm dacă putem construi un operator liniar şi continuu S de la F în E astfel încât $T \circ S = \mathrm{Id}_F$. Spunem în acest caz că S este un **invers la dreapta** al lui T.

⋆ **Teorema II.10. – Fie T un operator liniar, continuu şi surjectiv de la E în F.**

Următoarele proprietăţi sunt echivalente:

(i) T **admite un invers la dreapta.**

(ii) $N(T) = T^{-1}(0)$ **admite un suplement topologic în** E.

DEMONSTRAŢIE.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Fie S un invers la dreapta al lui T. Se verifică uşor că $R(S) = S(F)$ este un suplement topologic al lui $N(T)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Fie L un suplement topologic al lui $N(T)$. Notăm cu P proiectorul lui E pe L (P este un operator liniar şi continuu). Fiind dat $f \in F$, notăm cu x una dintre soluţiile ecuaţiei $Tx = f$ şi punem $Sf = Px$; observăm că S este independent de alegerea lui x. Se verifică uşor că S este un operator liniar, continuu şi că $T \circ S = \mathrm{Id}_F$.

REMARCA 9. – Putem construi exemple de spaţii reflexive E şi F şi de operatori surjectivi care nu au invers la dreapta. Intr-adevăr, fie $G \subset E$ un subspaţiu închis fără suplement topologic (remarca 8), $F = E/G$ şi fie T proiecţia canonică a lui E pe F (pentru definiţie şi proprietăţi ale spaţiului cât, vezi [EX]).

Prin analogie spunem că S este un **invers la stânga** al lui T dacă S este un operator liniar şi continuu de la F în E astfel încât $S \circ T = \mathrm{Id}_E$.

$\star$ **Teorema II.11.** – **Fie T un operator liniar, continuu şi injectiv de la E în F.**

Următoarele proprietăţi sunt echivalente:

(i) T **admite un invers la stânga.**

(ii) $R(T) = T(E)$ **este închis şi admite un suplement topologic în** F.

DEMONSTRAŢIE.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Este uşor de verificat că $R(T)$ este închis şi că $N(S)$ este un suplement topologic al lui $R(T)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Fie P un proiector continuu al lui F pe $R(T)$. Fie $f \in F$; deoarece $Pf \in R(T)$, rezultă că există un unic $x \in E$ astfel încât $Tx = Pf$. Definim $Sf = x$. Este clar că $S \circ T = \mathrm{Id}_E$; pe de altă parte, S este continuu, conform corolarului II.6.

II.5 Relaţii de ortogonalitate

Notaţii. – Fie X un spaţiu Banach.
Dacă $M \subset X$ este un subspaţiu vectorial, punem

$$\boxed{M^\perp = \{f \in X';\ \langle f, x\rangle = 0, \quad \forall x \in M\}.}$$

Dacă $N \subset X'$ este un subspaţiu vectorial, punem

$$\boxed{N^\perp = \{x \in X;\ \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall f \in N\}.}$$

Spunem că $M^\perp$ (resp. $N^\perp$) este **ortogonalul** lui M (resp. N). Remarcăm că $M^\perp$ (resp. $N^\perp$) este un subspaţiu vectorial închis al lui X' (resp. X).

Incepem cu un rezultat simplu:

• **Propoziţia II.12.** – **Fie $M \subset X$ un subspaţiu vectorial. Atunci**

$$\boxed{(M^\perp)^\perp = \overline{M}.}$$

Fie $N \subset X'$ un subspaţiu vectorial. Atunci

$$(N^{\perp})^{\perp} \supset \overline{N}.$$

Remarca 10. – Se poate întâmpla ca $(N^{\perp})^{\perp} \neq \overline{N}$; a se vedea un exemplu în [EX]. Vom vedea în capitolul III că dacă X este reflexiv atunci $(N^{\perp})^{\perp} = \overline{N}$. Mai general, vom vedea că dacă X este un spaţiu Banach oarecare atunci $(N^{\perp})^{\perp}$ coincide cu închiderea lui N pentru topologia $\sigma(X', X)$.

Demonstraţia propoziţiei II.12. – Este clar că $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$ şi, întrucât $(M^{\perp})^{\perp}$ este închis, avem $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

Invers, să arătăm că $(M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M}$. Raţionăm prin reducere la absurd şi presupunem că există $x_0 \in (M^{\perp})^{\perp}$ astfel încât $x_0 \notin \overline{M}$. Separăm în sens strict mulţimile $\{x_0\}$ şi $\overline{M}$ printr-un hiperplan închis. Există deci $f \in X'$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\langle f, x\rangle < \alpha < \langle f, x_0\rangle \quad \forall x \in M. \tag{15}$$

Deoarece M este un subspaţiu vectorial, rezultă că $\langle f, x\rangle = 0$ $\forall x \in M$. Deci $f \in M^{\perp}$. Prin urmare $\langle f, x_0\rangle = 0$ – ceea ce contrazice (15).

De asemenea, este clar că $N \subset (N^{\perp})^{\perp}$ şi deci $\overline{N} \subset (N^{\perp})^{\perp}$.

Remarca 11. – Este instructiv să se urmeze demonstraţia de mai sus pentru a încerca să se arate că $(N^{\perp})^{\perp} = \overline{N}$. Presupunem, prin absurd, că există $f_0 \in (N^{\perp})^{\perp}$ astfel încât $f_0 \notin \overline{N}$. Separăm în sens strict mulţimile $\{f_0\}$ şi $\overline{N}$ printr-un hiperplan închis în X'. Există deci $\varphi \in X''$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\varphi(f) < \alpha < \varphi(f_0) \quad \forall f \in N.$$

Avem, în plus, $\varphi(f) = 0$, $\forall f \in N$, dar nu putem continua argumentul decât dacă, “prin hazard”, există $x_0 \in X$ astfel încât

$$\varphi(f) = \langle f, x_0\rangle \quad \forall f \in X'$$

(este exact ce se întâmplă dacă X este reflexiv!).

Propoziţia II.13. – Fie G şi L două subspaţii închise ale lui X. Atunci

$$\boxed{G \cap L = (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp}} \tag{16}$$

(17) $$\boxed{G^{\perp} \cap L^{\perp} = (G + L)^{\perp}.}$$

Demonstraţie. – **Justificarea lui (16)**. Este evident că $G \cap L \subset (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp}$; într-adevăr, dacă $x \in G \cap L$ şi $f \in G^{\perp} + L^{\perp}$ atunci $\langle f, x\rangle = 0$. Invers, avem $G^{\perp} \subset G^{\perp} + L^{\perp}$ şi deci $(G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp} \subset G^{\perp\perp} = G$ (remarcăm că dacă $N_1 \subset N_2$ atunci $N_2^{\perp} \subset N_1^{\perp}$); în mod similar, $(G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp} \subset L$. Deci $(G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp} \subset G \cap L$.

Justificarea lui (17). Folosim acelaşi argument ca în demonstrarea relaţiei (16).

Corolarul II.14. – Fie G şi L două subspaţii închise ale lui X. Atunci

(18) $$(G \cap L)^{\perp} \supset \overline{G^{\perp} + L^{\perp}}$$

(19) $$(G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp} = \overline{G + L}.$$

Demonstraţie. – Se aplică propoziţiile II.12 şi II.13.

Iată acum un rezultat mai profund:

⋆ **Teorema II.15. – Fie G şi L două subspaţii închise ale lui X.**

Proprietăţile următoare sunt echivalente:

(a) $G + L$ **este închis în** X

(b) $G^{\perp} + L^{\perp}$ **este închis în** X'

(c) $G + L = (G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp}$

(d) $G^{\perp} + L^{\perp} = (G \cap L)^{\perp}$.

Demonstraţie.

$(a) \Longleftrightarrow (c)$ rezultă din (17).

$(d) \Longrightarrow (b)$ este evident.

Rămâne aşadar să demonstrăm implicaţiile $(a) \Rightarrow (d)$ şi $(b) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Longrightarrow (d)$. Conform (16), este suficient să arătăm că $(G \cap L)^{\perp} \subset G^{\perp} + L^{\perp}$. Fiind dat $f \in (G \cap L)^{\perp}$, considerăm funcţionala $\varphi : G + L \to \mathbf{R}$

definită după cum urmează. Pentru orice $x \in G + L$, scriem $x = a + b$, cu $a \in G$ şi $b \in L$. Definim

$$\varphi(x) = \langle f, a \rangle.$$

Evident, φ nu depinde de descompunerea lui x şi φ este liniară. Pe de altă parte (teorema II.8), se poate alege o descompunere a lui x astfel încât $\|a\| \le C\|x\|$ şi deci

$$|\varphi(x)| \le C\|x\| \quad \forall x \in G + L.$$

Prelungim φ la o funcţională liniară şi continuă $\tilde{\varphi}$ definită pe X. Obţinem astfel

$$f = (f - \tilde{\varphi}) + \tilde{\varphi} \text{ cu } f - \tilde{\varphi} \in G^\perp \text{ şi } \tilde{\varphi} \in L^\perp.$$

$(b) \Longrightarrow (a)$. Ştim deja, conform corolarului II.9, că există o constantă C astfel încât

$$\text{dist}(f, G^\perp \cap L^\perp) \le C[\text{dist}(f, G^\perp) + \text{dist}(f, L^\perp)] \quad \forall f \in X'. \tag{20}$$

Pe de altă parte,

$$\text{dist}(f, G^\perp) = \operatorname{Sup}_{\substack{x \in G \\ \|x\| \le 1}} \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X'. \tag{21}$$

[Aplicăm teorema I.11 cu $\varphi(x) = I_{\overline{B}_X(0,1)}(x) - \langle f, x \rangle$ şi $\psi(x) = I_G(x)$]. In mod similar, obţinem

$$\text{dist}\,(f, L^\perp) = \operatorname{Sup}_{\substack{x \in L \\ \|x\| \le 1}} \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X' \tag{22}$$

şi, conform (17),

$$\text{dist}\,(f, G^\perp \cap L^\perp) = \text{dist}(f, (G+L)^\perp) = \operatorname{Sup}_{\substack{x \in \overline{G+L} \\ \|x\| \le 1}} \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X'. \tag{23}$$

Combinând (20), (21), (22) şi (23) găsim

$$\operatorname{Sup}_{\substack{x \in \overline{G+L} \\ \|x\| \le 1}} \langle f, x \rangle \le C[\operatorname{Sup}_{\substack{x \in G \\ \|x\| \le 1}} \langle f, x \rangle + \operatorname{Sup}_{\substack{x \in L \\ \|x\| \le 1}} \langle f, x \rangle] \quad \forall f \in X'. \tag{24}$$

Rezultă din (24) că

$$\overline{B_G(0,1) + B_L(0,1)} \supset \frac{1}{C}\, B_{\overline{G+L}}(0,1). \tag{25}$$

Intr-adevăr, presupunem prin absurd că există $x_0 \in \overline{G+L}$ cu

$$\|x_0\| < \frac{1}{C} \quad \text{şi} \quad x_0 \notin \overline{B_G(0,1) + B_L(0,1)}.$$

In acest caz s-ar putea separa în sens strict mulţimile $\{x_0\}$ şi $\overline{B_G(0,1) + B_L(0,1)}$ printr-un hiperplan închis în X. Deci ar exista $f \in X'$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\langle f, x\rangle < \alpha < \langle f, x_0\rangle \quad \forall x \in B_G(0,1) + B_L(0,1).$$

In consecinţă,

$$\operatorname{Sup}_{\substack{x\in G\\ \|x\|\le 1}} \langle f, x\rangle + \operatorname{Sup}_{\substack{x\in L\\ \|x\|\le 1}} \langle f, x\rangle \le \alpha < \langle f, x_0\rangle,$$

ceea ce contrazice (24). Am stabilit astfel (25).

In sfârşit, considerăm spaţiul $E = G \times L$ înzestrat cu norma

$$\|\,[x,y]\,\| = \text{Max}\{\|x\|,\ \|y\|\}$$

şi spaţiul $F = \overline{G+L}$ înzestrat cu norma lui X.

Aplicaţia $T : E \to F$ definită prin $T([x,y]) = x + y$ este liniară, continuă şi, conform (25), ştim că

$$\overline{T(B_E(0,1))} \supset B_F\left(0, \frac{1}{C}\right).$$

Deducem [a se vedea demonstraţia teoremei II.5 (teorema aplicaţiei deschise), etapa a doua] că

$$T(B_E(0,1)) \supset B_F\left(0, \frac{1}{2C}\right).$$

In particular, T este surjectiv de la X pe Y, adică $G + L = \overline{G+L}$.

II.6 Introducere în teoria operatorilor liniari nemărginiţi. Definiţia adjunctului.

Definiţii. – Fie E şi F două spaţii Banach. Se numeşte **operator liniar nemărginit** definit pe E cu valori în F orice aplicaţie liniară

$A : D(A) \subset E \to F$ definită pe un subspaţiu liniar $D(A) \subset E$ cu valori în F. $D(A)$ se numeşte **domeniul** lui A.

Spunem că A este **mărginit** dacă există o constantă $c \geq 0$ astfel încât

$$\|Au\| \leq c\|u\| \quad \forall u \in D(A).$$

REMARCA 12. – Se poate întâmpla ca un operator nemărginit să fie mărginit. Terminologia nu este fericită, dar este răspândită în comunitatea matematică şi nu creează confuzii!

Precizăm câteva notaţii şi definiţii importante.

Graful lui $A =$	$G(A) =$	$\bigcup_{u \in D(A)} [u, Au] \subset E \times F$
Imaginea lui $A =$	$R(A) =$	$\bigcup_{u \in D(A)} Au \subset F$
Nucleul lui $A =$	$N(A) =$	$\{u \in D(A); Au = 0\} \subset E.$

Definiţie. – Un operator A se numeşte **închis** dacă $G(A)$ este o mulţime închisă în $E \times F$.

• REMARCA 13. – Pentru a demonstra că un operator A este închis se procedează în general în modul următor. Se consideră un şir (u_n) în $D(A)$ astfel încât $u_n \to u$ în E şi $Au_n \to f$ în F. Este vorba apoi de a verifica două lucruri:
(a) $u \in D(A)$
(b) $f = Au.$

REMARCA 14. – Dacă A este închis, atunci $N(A)$ este închis.

REMARCA 15. – In practică, **majoritatea** operatorilor nemărginiţi pe care îi întâlnim sunt **închişi** şi cu domeniul $D(A)$ **dens** în E.

Definiţia adjunctului $A^\star$**.** Fie $A : D(A) \subset E \to F$ un operator liniar nemărginit cu domeniul **dens**. Definim operatorul nemărginit $A^\star : D(A^\star) \subset F' \to E'$ după cum urmează. Fie mai întâi

$$D(A^\star) = \{v \in F';\ \exists c \geq 0 \text{ astfel încât } |\langle v, Au\rangle| \leq c\|u\| \quad \forall u \in D(A)\}.$$

Este evident că $D(A^\star)$ este un subspaţiu vectorial al lui F'. Definim în continuare $A^\star v$ pentru $v \in D(A^\star)$. Fiind dat $v \in D(A^\star)$, considerăm aplicaţia $g : D(A) \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(u) = \langle v, Au \rangle, u \in D(A).$$

Avem

$$|g(u)| \leq c\|u\| \quad \forall u \in D(A).$$

Conform teoremei I.1 (Hahn-Banach, forma analitică) ştim că există $f : E \to \mathbf{R}$ o extensie a lui g astfel încât

$$|f(u)| \leq c\|u\| \quad \forall u \in E.$$

Rezultă că $f \in E'$. Remarcăm că extensia lui g este **unică** deoarece f este continuă şi $D(A)$ este **dens** în E.

Fie

$$A^\star v = f.$$

Este clar că $A^\star$ este liniar. Operatorul $A^\star : D(A^\star) \subset F' \to E'$ se numeşte **adjunctul** lui A. Avem, în consecinţă, relaţia fundamentală următoare care leagă A şi $A^\star$

$$\boxed{\langle v, Au \rangle_{F',F} = \langle A^\star v, u \rangle_{E',E} \quad \forall u \in D(A), \quad \forall v \in D(A^\star).}$$

Remarca 16. – Nu este necesar să facem apel la teorema Hahn-Banach pentru a prelungi g. Este suficient să folosim prelungirea **prin continuitate** a lui g (deoarece g este definită pe $D(A)$, care este densă, g este uniform continuă şi $\mathbf{R}$ este complet); a se vedea, de exemplu, Choquet [1], teorema 20-14 în capitolul V.

$\star$ Remarca 17. – Se poate întâmpla ca $D(A^\star)$ să nu fie dens în F', chiar dacă A este închis; a se vedea un exemplu în [EX]. Totuşi se arată că dacă A este închis, atunci $D(A^\star)$ este dens în F' pentru topologia $\sigma(F', F)$ definită în capitolul III; a se vedea [EX]. In particular, dacă F este reflexiv, atunci $D(A^\star)$ este dens în F' pentru topologia uzuală asociată normei; a se vedea cap. III.5.

• **Propoziţia II.16. – Fie** $A : D(A) \subset E \to F$ **un operator nemărginit cu domeniul dens. Atunci** $A^\star$ **este închis, adică** $G(A^\star)$ **este închis în** $F' \times E'$.

DEMONSTRAŢIE. – Fie $v_n \in D(A^\star)$ astfel încât $v_n \to v$ în F' şi $A^\star v_n \to f$ în E'. Trebuie să demonstrăm că (a) $v \in D(A^\star)$ şi (b) $A^\star v = f$. Avem

$$\langle v_n, Au\rangle = \langle A^\star v_n, u\rangle \quad \forall u \in D(A).$$

Prin trecere la limită obţinem

$$\langle v, Au\rangle = \langle f, u\rangle \quad \forall u \in D(A).$$

Deci $v \in D(A^\star)$ (din definiţia lui $D(A^\star)$) şi $A^\star v = f$.

Grafurile lui A şi $A^\star$ sunt legate printr-o relaţie de ortogonalitate foarte simplă. Intr-adevăr, considerăm aplicaţia $J : F' \times E' \to E' \times F'$ definită prin

$$J([v, f]) = [-f, v].$$

Fie $A : D(A) \subset E \to F$ un operator nemărginit şi dens definit. Atunci

$$\boxed{J[G(A^\star)] = G(A)^\perp}$$

Intr-adevăr, fie $[v, f] \in F' \times E'$; atunci

$$[v, f] \in G(A^\star) \iff \langle f, u\rangle = \langle v, Au\rangle \quad \forall u \in D(A)$$

$$\iff \quad -\langle f, u\rangle + \langle v, Au\rangle = 0 \quad \forall u \in D(A)$$

$$\iff \quad [-f, v] \in G(A)^\perp.$$

Este comod să introducem spaţiul $X = E \times F$ (deci $X' = E' \times F'$) şi să considerăm subspaţiile $G = G(A)$ şi $L = E \times \{0\}$ ale lui X. Putem descrie $N(A)$, $N(A^\star)$, $R(A)$ şi $R(A^\star)$ în funcţie de G şi L.

Se verifică uşor că

$$N(A) \times \{0\} = G \cap L \tag{26}$$

$$E \times R(A) = G + L \tag{27}$$

$$\{0\} \times N(A^\star) = G^\perp \cap L^\perp \tag{28}$$

$$R(A^\star) \times F' = G^\perp + L^\perp. \tag{29}$$

• **Corolarul II.17.** – **Fie** $A : D(A) \subset E \to F$ **un operator nemărginit, închis şi dens definit. Atunci**
(i) $N(A) = R(A^\star)^\perp$
(ii) $N(A^\star) = R(A)^\perp$
(iii) $N(A)^\perp \supset \overline{R(A^\star)}$
(iv) $N(A^\star)^\perp = \overline{R(A)}$.

Demonstraţie. – (i) – Conform (29) avem

$$R(A^\star)^\perp \times \{0\} = (G^\perp + L^\perp)^\perp = G \cap L \text{ (conform (16))}$$

$$= N(A) \times \{0\} \text{ (conform (26))}.$$

(ii) – Conform (27) avem

$$\{0\} \times R(A)^\perp = (G + L)^\perp = G^\perp \cap L^\perp \text{ (conform (17))}$$

$$= \{0\} \times N(A^\star) \text{ (conform (28))}.$$

(iii) şi (iv) rezultă direct din (i) şi (ii), trecerea la ortogonal şi propoziţia II.12.

Remarca 18. – Cu titlu de exerciţiu, daţi o demonstraţie **directă** a lui (i) şi (ii), fără a introduce G şi L; a se vedea [EX].

Remarca 19. – Se poate întâmpla, chiar dacă A este un operator liniar şi continuu de la E în F că $N(A)^\perp \neq \overline{R(A^\star)}$; a se vedea un exemplu în [EX]. Totuşi (cf. remarcii 10) se poate arăta că $N(A)^\perp$ coincide întotdeauna cu închiderea lui $R(A^\star)$ pentru topologia $\sigma(E', E)$; în particular, dacă E este reflexiv, avem întotdeauna $N(A)^\perp = \overline{R(A^\star)}$.

II.7 Caracterizarea operatorilor cu imaginea închisă. Operatori surjectivi. Operatori mărginiţi.

⋆ **Teorema II.18.** – **Fie** $A : D(A) \subset E \to F$ **un operator nemărginit, închis şi dens definit. Următoarele proprietăţi sunt echivalente:**
(i) $R(A)$ **este închis**
(ii) $R(A^\star)$ **este închis**
(iii) $R(A) = N(A^\star)^\perp$
(iv) $R(A^\star) = N(A)^\perp$.

DEMONSTRAŢIE. – Se reiau notaţiile introduse în Cap. II.6. De aceea

$(i) \quad \Leftrightarrow G + L$ este închis în X (cf. (27))

$(ii) \quad \Leftrightarrow G^{\perp} + L^{\perp}$ este închis în X' (cf. (29))

$(iii) \quad \Leftrightarrow G + L = (G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp}$ (cf. (27) şi (28))

$(iv) \quad \Leftrightarrow (G \cap L)^{\perp} = G^{\perp} + L^{\perp}$ (conform (26) şi (29)).

Concluzia rezultă apoi din teorema II.15.

REMARCA 20. – Fie $A : D(A) \subset E \to F$ un operator nemărginit şi închis. Atunci $R(A)$ este închis dacă şi numai dacă există o constantă C astfel încât

$$\operatorname{dist}(u, N(A)) \leq C\|Au\| \quad \forall u \in D(A);$$

a se vedea [EX].

Rezultatul care urmează este o caracterizare utilă a operatorilor **surjectivi**.

$\star$ **Teorema II.19. – Fie** $A : D(A) \subset E \to F$ **un operator nemărginit, închis şi dens definit. Următoarele proprietăţi sunt echivalente:**

(a) A **este surjectiv, adică** $R(A) = F$,

(b) **există o constantă** $C \geq 0$ **astfel încât**

$$\|v\| \leq C\|A^{\star}v\| \quad \forall v \in D(A^{\star}),$$

(c) $N(A^{\star}) = \{0\}$ **şi** $R(A^{\star})$ **este închis.**

REMARCA 21. – In practică, dacă se doreşte să se arate că operatorul A este surjectiv, se utilizează implicaţia $(b) \Rightarrow (a)$ în felul următor. Se consideră ecuaţia $A^{\star}v = f$ cu $f \in E'$ şi se arată că $\|v\| \leq C\|f\|$ (cu C independentă de f). Această tehnică se numeşte metoda **estimărilor a priori**: nu ne preocupăm să ştim dacă ecuaţia $A^{\star}v = f$ are sau nu o soluţie; presupunem că v este **a priori** o soluţie a acestei ecuaţii şi încercăm să estimăm norma sa.

DEMONSTRAŢIE.

$(a) \Rightarrow (c)$. Este o consecinţă directă a corolarului II.17 şi a teoremei II.18.

$(b) \Rightarrow (c)$ este evident (se raţionează cu şiruri Cauchy).

$(c) \Rightarrow (b)$. Conform (28) şi (29) avem $G^\perp \cap L^\perp = \{0\}$ şi $G^\perp + L^\perp$ este închis. Se poate aplica teorema II.8: există o constantă C astfel încât orice $z \in G^\perp + L^\perp$ se descompune în mod unic (deoarece $G^\perp \cap L^\perp = \{0\}$) în

$$z = a + b \quad \text{cu} \quad a \in G^\perp,\ b \in L^\perp,\ \|a\| \leq C\|z\|,\ \|b\| \leq C\|z\|.$$

Fie $v \in D(A^\star)$. Atunci $z = [A^\star v, 0]$ se scrie $z = a + b$ cu

$$a = [A^\star v, -v] \in G^\perp \quad \text{şi} \quad b = [0, v] \in L^\perp.$$

Deci

$$\|b\| = \|v\| \leq C\|z\| = C\|A^\star\|.$$

Remarca 22. – Cu titlu de exerciţiu, se poate demonstra implicaţia $(a) \Rightarrow (b)$ printr-o altă metodă. Se poate demonstra – în ipoteza (a) – că mulţimea $\{v \in D(A^\star); \|A^\star v\| \leq 1\}$ este închisă în F', cu ajutorul teoremei Banach-Steinhaus.

Există următorul rezultat "dual":

$\star$ **Teorema II.20. – Fie $A : D(A) \subset F$ un operator nemărginit, închis şi dens definit. Următoarele proprietăţi sunt echivalente:**

(a) $A^\star$ **este surjectiv, adică** $R(A^\star) = E'$,

(b) **există o constantă** C **astfel încât**

$$\|u\| \leq C\|Au\| \quad \forall u \in D(A),$$

(c) $N(A) = \{0\}$ **şi** $R(A)$ **este închis.**

Demonstraţie. – Este similară cu cea a teoremei II.19. Cititorul poate redacta detaliile cu titlu de exerciţiu.

Remarca 23. – Dacă presupunem că, fie $\dim E < \infty$, fie că $\dim F < \infty$, atunci au loc echivalenţele:

$$A \text{ surjectiv} \Leftrightarrow A^\star \text{ injectiv}$$

$$A^\star \text{ surjectiv} \Leftrightarrow A \text{ injectiv}.$$

Intr-adevăr, $R(A)$ şi $R(A^\star)$ au în acest caz dimensiune finită şi sunt deci închise.

In cazul **general** au loc doar implicaţiile:

$$A \text{ surjectiv} \Rightarrow A^\star \text{ injectiv}$$

$$A^\star \text{ surjectiv} \Rightarrow A \text{ injectiv.}$$

Reciproca este falsă, aşa cum o arată următorul exemplu: fie $E = F = \ell^2$; pentru orice $x \in \ell^2$, $x = (x_n)_{n\geq 1}$, asociem mulţimea $Ax = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n\geq 1}$. Se verifică uşor că $A^\star = A$; $A^\star$ (resp. A) este injectiv, dar A (resp. $A^\star$) **nu** este surjectiv; $R(A)$ (resp. $R(A^\star)$) este dens definit şi nu este închis.

Teorema II.21. – Fie $A : D(A) \subset E \to F$ un operator nemărginit, închis şi dens definit. Următoarele proprietăţi sunt echivalente:
(i) $D(A) = E$
(ii) A **este mărginit**
(iii) $D(A^\star) = F'$
(iv) $A^\star$ **este mărginit.**
In aceste condiţii avem

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^\star\|_{\mathcal{L}(F',E')}.$$

DEMONSTRAŢIE. – $(i) \Rightarrow (ii)$ Se aplică teorema graficului închis.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Se foloseşte definiţia lui $D(A^\star)$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Se aplică propoziţia II.16 şi teorema graficului închis.
$\star$ $(iv) \Rightarrow (i)$ este mai delicat. Observăm mai întâi că $D(A^\star)$ este închis. Intr-adevăr, fie $v_n \in D(A^\star)$ astfel încât $v_n \to v$ în F'. Avem

$$\|A^\star(v_n - v_m)\| \leq c\|v_n - v_m\|;$$

deci $(A^\star v_n)$ este convergent către o limită f. Cum $A^\star$ este închis, $v \in D(A^\star)$ şi $A^\star v = f$. In spaţiul $X = E \times F$ se consideră subspaţiile $G = G(A)$ şi $L = \{0\} \times F$, astfel că

$$G + L = D(A) \times F \quad \text{şi} \quad G^\perp + L^\perp = E' \times D(A^\star).$$

Deci $G^\perp + L^\perp$ este închis în X'. Teorema II.15 ne permite să deducem că $G + L$ este închis, deci $D(A)$ este închis. Cum A este dens definit, rezultă că $D(A) = E$.

Să arătăm în continuare că $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^\star\|_{\mathcal{L}(F',E')}$. Avem

$$\langle v, Au\rangle = \langle A^\star v, u\rangle \quad \forall u \in E,\ \forall v \in F'.$$

Deci

$$|\langle v, Au\rangle| \le \|A^\star\|\|v\|\|u\|$$

şi

$$\|Au\| = \mathrm{Sup}_{\|v\|\le 1}|\langle v, Au\rangle| \le \|A^\star\|\|u\|$$

(conform corolarului I.4). Prin urmare, $\|A\| \le \|A^\star\|$. Inegalitatea contrară se deduce astfel:

$$\|A^\star v\| = \mathrm{Sup}_{\|u\|\le 1}|\langle A^\star v, u\rangle| = \mathrm{Sup}_{\|u\|\le 1}|\langle v, Au\rangle| \le \|A\|\|v\|.$$

In consecinţă, $\|A^\star\| \le \|A\|$.

II.8 Comentarii asupra capitolului II

1) Se pot descrie în mod **explicit** câteva subspaţii închise care nu au nici un suplement topologic. De exemplu, c_0 nu are nici un suplement topologic al lui ℓ^∞ (vezi De Vito [1]); reamintim că ℓ^∞ desemnează spaţiul şirurilor $x = (x_n)$ mărginite în $\mathbf{R}$ şi înzestrat cu norma $\|x\| = \mathrm{Sup}_n|x_n|$, iar c_0 este subspaţiul închis al şirurilor astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Alte exemple se găsesc în Rudin [1] (un subspaţiu al lui L^1) sau în Köthe [1] şi Beauzamy [1] (un subspaţiu al lui ℓ^p, $p \ne 2$).

2) Majoritatea rezultatelor din capitolul II se extind la **spaţii Fréchet** (spaţii local convexe, metrizabile, complete). Sunt posibile numeroase generalizări; vezi, de exemplu, Schaefer [1], Horváth [1], Edwards [1], Treves [1], [3], Köthe [1]. Aceste extensii sunt motivate de **teoria distribuţiilor** (vezi L. Schwartz [1]), unde multe spaţii importante **nu** sunt spaţii Banach. Pentru aplicaţii în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale cititorul poate consulta Hörmander [1], Treves [1], [2], [3].

3) In Kato [1] se găsesc câteva extensii ale rezultatelor din cap. II.5.

Capitolul III

TOPOLOGII SLABE. SPAŢII REFLEXIVE. SPAŢII SEPARABILE. SPAŢII UNIFORM CONVEXE

III.1 Preliminarii asupra topologiei celei mai puţin fine care face continue toate aplicaţiile unei familii

Vom începe cu câteva preliminarii de topologie generală. Fie X o mulţime şi $(Y_i)_{i\in I}$ o familie de spaţii topologice. Pentru fiecare $i \in I$ considerăm o aplicaţie $\varphi_i : X \to Y_i$.

Problema 1. – Să se construiască pe X o topologie astfel încât toate aplicaţiile $(\varphi_i)_{i\in I}$ să fie continue. Dacă este posibil, să se construiască topologia **cea mai puţin fină** $\mathcal{T}$, adică aceea cu **cele mai puţine mulţimi deschise** [altfel zis, topologia cea mai "economică"] care face ca orice aplicaţie φ_i să fie continuă.

Observăm că dacă X este înzestrat cu topologia discretă (adică orice submulţime a lui X este deschisă), atunci orice aplicaţie φ_i este continuă; desigur, această topologie este departe de a fi cea mai "economică" – este chiar cea mai puţin economică! Fie $\omega_i \subset Y_i$ o mulţime deschisă; atunci $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ este, în mod **necesar** o mulţime deschisă pentru topologia $\mathcal{T}$. Dacă ω_i descrie familia mulţimilor deschise ale lui Y_i şi i parcurge I, mulţimile $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ formează o familie de submulţimi ale lui X care sunt, în mod necesar, deschişi în topologia $\mathcal{T}$; notăm această familie cu $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Topologia $\mathcal{T}$ este topologia cea mai puţin fină astfel încât toate mulţimile

$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sunt deschise. Am ajuns aşadar la problema următoare:

Problema 2. – Să se construiască familia $\mathcal{F}$ de submulţimi ale lui X, cea mai economică cu putinţă, care să fie stabilă în raport cu $\bigcap_{\text{finit}}$ şi $\bigcup_{\text{arbitrar}}$ şi astfel încât $U_\lambda \in \mathcal{F}$, pentru orice $\lambda \in \Lambda$. Răspunsul la problema 2 este dat de construcţia următoare.

Considerăm mai întâi intersecţiile finite $\bigcap_{\lambda\in\Gamma} U_\lambda$, $\Gamma \subset \Lambda$, Γ finită. Obţinem astfel o familie Φ de submulţimi ale lui X, stabilă în raport cu $\bigcap_{\text{finit}}$. Se consideră apoi familia $\mathcal{F}$ obţinută prin reuniuni arbitrare de elemente din Φ. Este clar că familia $\mathcal{F}$ este stabilă în raport cu reuniuni arbitrare; din contră, nu este evident că familia $\mathcal{F}$ este stabilă în raport cu intersecţiile finite. Acest lucru face obiectul următorului rezultat

Lema III.1. – Familia $\mathcal{F}$ este stabilă în raport cu intersecţii finite.

Demonstraţia lemei III.1 este lăsată cititorului. Ea constituie un agreabil (!) divertisment în teoria mulţimilor.

Remarca 1. – **Nu trebuie inversată ordinea operaţiilor în construcţia lui $\mathcal{F}$.** Ar fi, de asemenea, natural să **începem** prin a considera $\bigcup_{\text{arbitrar}}$ de mulţimi (U_λ) şi **apoi** de a lua $\bigcap_{\text{finit}}$. Familia astfel obţinută este bineînţeles stabilă prin $\bigcap_{\text{finit}}$, dar ea **nu este stabilă** prin $\bigcup_{\text{arbitrar}}$. Ar trebui în acest caz să se considere **încă o dată** reuniuni arbitrare.

Să recapitulăm: deschişii topologiei $\mathcal{T}$ se obţin considerând mai întâi intersecţii finite de mulţimi de forma $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$, ω_i deschis în Y_i şi apoi reuniuni arbitrare de asemenea mulţimi.

Rezultă că pentru orice $x \in X$ se obţine o bază de vecinătăţi a lui x pentru topologia $\mathcal{T}$ considerând mulţimile de forma $\bigcap\limits_{\text{finit}} \varphi_i^{-1}(V_i)$, unde V_i este o vecinătate a lui $\varphi_i(x)$ în Y_i.

In continuare înzestrăm X cu topologia $\mathcal{T}$; reamintim câteva proprietăţi elementare ale acestei topologii.

• **Propoziţia III.1. – Fie (x_n) un şir în X. Atunci $x_n \to x$ (în $\mathcal{T}$) dacă şi numai dacă $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ pentru orice $i \in I$.**

Demonstraţie. – Dacă $x_n \to x$, atunci $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ pentru orice i, deoarece fiecare aplicaţie φ_i este continuă.

Reciproc, fie U o vecinătate a lui x. Din cele de mai sus, se poate presupune că U este de forma $U = \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(V_i)$ cu $J \subset I$ finită. Pentru fiecare $i \in J$, există un întreg N_i astfel încât $\varphi_i(x_n) \in V_i$ pentru orice $n \geq N_i$. Rezultă că $x_n \in U$ pentru $n \geq N = \mathrm{Max}_{i\in J} N_i$.

• **Propoziţia III.2. – Fie Z un spaţiu topologic şi fie ψ o aplicaţie de la Z în X. Atunci ψ este continuă dacă şi numai dacă $\varphi_i \circ \psi$ este continuă de la Z în Y_i pentru orice $i \in I$.**

DEMONSTRAŢIE. – Dacă ψ este continuă atunci $\varphi_i \circ \psi$ este, de asemenea, continuă pentru orice $i \in I$. Invers, fie U un deschis în X; trebuie să demonstrăm că $\psi^{-1}(U)$ este deschisă în Z. Ştim însă că U este de forma $U = \bigcup_{\text{oarecare}} \bigcap_{\text{finit}} \varphi_i^{-1}(\omega_i)$, unde ω_i sunt deschişi în Y_i. Deci

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{\text{oarecare}} \bigcap_{\text{finit}} \psi^{-1}[\varphi_i^{-1}(\omega_i)] = \bigcup_{\text{oarecare}} \bigcap_{\text{finit}} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(\omega_i);$$

care este deschisă în Z, deoarece orice aplicaţie $\varphi_i \circ \psi$ este continuă.

III.2 Definiţia şi proprietăţile elementare ale topologiei slabe $\sigma(E, E')$

Fie E un spaţiu Banach şi $f \in E'$. Notăm prin $\varphi_f : E \to \mathbf{R}$ aplicaţia liniară definită prin $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Când f parcurge E', obţinem o familie $(\varphi_f)_{f\in E'}$ de aplicaţii de la E în $\mathbf{R}$.

Definiţie. – Topologia **slabă** $\sigma(E, E')$ pe E este topologia cea mai puţin fină care face continue toate aplicaţiile $(\varphi_f)_{f\in E'}$ (în sensul lui §III.1 cu $X = E$, $Y_i = \mathbf{R}$, pentru fiecare i şi $I = E'$).

Propoziţia III.3. – Topologia slabă $\sigma(E, E')$ este separată.

DEMONSTRAŢIE. – Fie $x_1, x_2 \in E$ cu $x_1 \neq x_2$. Căutăm să construim O_1 şi O_2, mulţimi deschise pentru topologia slabă $\sigma(E, E')$ astfel încât $x_1 \in O_1, x_2 \in O_2$ şi $O_1 \cap O_2 = \phi$. Conform teoremei Hahn-Banach (a doua formă geometrică), există un hiperplan închis care separă în sens strict mulţimile $\{x_1\}$ şi $\{x_2\}$. Deci există $f \in E'$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\langle f, x_1\rangle < \alpha < \langle f, x_2\rangle.$$

Fie

$$O_1 = \{x \in E; \langle f, x\rangle < \alpha\} = \varphi_f^{-1}\left((-\infty, \alpha)\right)$$

$$O_2 = \{x \in E; \langle f, x\rangle > \alpha\} = \varphi_f^{-1}\left((\alpha, +\infty)\right).$$

Evident, O_1 şi O_2 sunt deschise pentru $\sigma(E, E')$ şi verifică $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$ şi $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Propoziţia III.4. – Fie $x_0 \in E$; obţinem o bază de vecinătăţi a lui x_0 pentru topologia $\sigma(E, E')$ considerând toate mulţimile de forma

$$V = \{x \in E; |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \ \ \forall i \in I\},$$

unde I este finită, $f_i \in E'$ şi $\varepsilon > 0$.

Demonstraţie. – Este limpede că $V = \bigcap_{i \in I} \varphi_{f_i}^{-1}((a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon))$ cu $a_i = \langle f_i, x_0\rangle$ este o mulţime deschisă pentru topologia $\sigma(E, E')$ şi conţine x_0. Invers, fie U o vecinătate a lui x_0 pentru $\sigma(E, E')$. Se ştie (cf. §III.1) că există o mulţime deschisă W care conţine x_0, $W \subset U$, de forma $W = \bigcap_{\text{finit}} \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i)$, I finită, unde ω_i este o vecinătate (în $\mathbf{R}$) a lui $a_i = \langle f_i, x_0\rangle$. Deci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \subset \omega_i$ pentru orice $i \in I$. Rezultă că $x_0 \in V \subset W \subset U$.

Notaţie. – Dacă un şir (x_n) din E converge la x în topologia slabă $\sigma(E, E')$, vom scrie $x_n \rightharpoonup x$. Pentru a evita confuziile vom preciza adesea "$x_n \rightharpoonup x$ slab în $\sigma(E, E')$". In caz de ambiguitate vom insista spunând "$x_n \to x$ tare", ceea ce înseamnă $\|x_n - x\| \to 0$.

• **Propoziţia III.5. – Fie (x_n) un şir în E. Atunci**

(i) **$[x_n \rightharpoonup x$ slab în $\sigma(E, E')] \Leftrightarrow [\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \ \ \forall f \in E']$.**

(ii) **Dacă $x_n \to x$ tare, atunci $x_n \rightharpoonup x$ slab în $\sigma(E, E')$.**

(iii) **Dacă $x_n \rightharpoonup x$ slab în $\sigma(E, E')$, atunci $\|x_n\|$ este mărginită şi $\|x\| \le \liminf \|x_n\|$.**

(iv) **Dacă $x_n \rightharpoonup x$ slab în $\sigma(E, E')$ şi dacă $f_n \to f$ tare în E' (adică $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$), atunci $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.**

Demonstraţie.

(i) rezultă din propoziţia III.1 şi din definiţia topologiei slabe $\sigma(E, E')$.

(ii) rezultă din *(i)* deoarece $|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \le \|f\| \, \|x_n - x\|$.

(iii) Se aplică corolarul II.3 - care este o consecinţă a teoremei lui Banach-Steinhaus. Este deci suficient să verificăm că pentru orice $f \in E'$ mulţimea $(\langle f, x_n\rangle)_n$ este mărginită. Trecând la limită în inegalitatea

$$|\langle f, x_n\rangle| \leq \|f\| \, \|x_n\|$$

găsim

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\| \liminf \|x_n\|$$

care implică (corolarul I.4)

$$\|x\| = \mathrm{Sup}_{\|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \liminf \|x_n\|.$$

(iv) rezultă din inegalitatea

$$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \leq \|f_n - f\| \, \|x_n\| + |\langle f, x_n - x\rangle|.$$

Pentru a încheia demonstraţia folosim apoi (i) şi (iii).

Propoziţia III.6. – Fie E un spaţiu finit dimensional. Atunci topologia slabă $\sigma(E, E')$ şi topologia uzuală coincid. In particular, un şir (x_n) converge slab dacă şi numai dacă el converge tare.

Demonstraţie. – Topologia slabă are **întotdeauna** mai puţine mulţimi deschise decât topologia tare. Invers, trebuie să verificăm că un deschis în topologia tare este deschis şi în topologia slabă. Fie $x_0 \in E$ şi fie U o vecinătate a lui x_0 în topologia tare. Trebuie să construim o vecinătate V a lui x_0 în topologia slabă $\sigma(E, E')$ astfel încât $V \subset U$. Cu alte cuvinte, trebuie să găsim $f_1, f_2, \ldots, f_k$ în E' şi $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$V = \{x \in E;\ |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k\} \subset U.$$

Fie $r > 0$ astfel încât $B(x_0, r) \subset U$. Alegem o bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a lui E astfel încât $\|e_i\| = 1, \quad \forall i$. Orice $x \in E$ admite o descompunere $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ şi aplicaţiile $x \mapsto x_i$ sunt funcţionale liniare şi continue pe E, notate cu f_i. Avem

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle f_i, x - x_0\rangle| < n\varepsilon$$

pentru orice $x \in V$. Alegând $\varepsilon = r/n$ obţinem $V \subset U$.

REMARCA 2. – Mulţimile deschise (resp. închise) în topologia slabă $\sigma(E, E')$ sunt de asemenea deschise (resp. închise) pentru topologia tare. Dacă E este **infinit dimensional**, topologia slabă $\sigma(E, E')$ este **strict mai puţin fină** decât topologia tare, adică există mulţimi deschise (resp. închise) pentru topologia tare care nu sunt deschise (resp. închise) pentru topologia slabă. Iată două exemple:

Exemplul 1. – Sfera unitate $S = \{x \in E;\ \|x\| = 1\}$, cu E infinit dimensional, nu este **niciodată** închisă pentru topologia slabă $\sigma(E, E')$. Mai precis, arătăm că

$$\overline{S}^{\sigma(E,E')} = \{x \in E;\ \|x\| \le 1\}, \tag{1}$$

unde $\overline{S}^{\sigma(E,E')}$ semnifică închiderea lui S în topologia slabă $\sigma(E, E')$.

Fie $x_0 \in E$ cu $\|x_0\| < 1$; verificăm că $x_0 \in \overline{S}^{\sigma(E,E')}$. Fie deci V o vecinătate a lui x_0 în $\sigma(E, E')$. Trebuie să demonstrăm că $V \cap S \neq \emptyset$. Putem presupune întotdeauna că V este de forma

$$V = \{x \in E;\ |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k\}$$

cu $\varepsilon > 0$ şi $f_1, f_2, \ldots, f_k \in E'$. Fixăm $y_0 \in E$, $y_0 \neq 0$ astfel încât

$$\langle f_i, y_0\rangle = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, k.$$

[Un asemenea y_0 există; în caz contrar, aplicaţia $\varphi : E \to \mathbf{R}^k$ definită prin

$$\varphi(z) = (\langle f_i, z\rangle)_{1 \le i \le k}$$

ar fi injectivă şi φ ar fi un izomorfism de la E în $\varphi(E)$ – de unde $\dim E \le k$]. Funcţia $g(t) = \|x_0 + t y_0\|$ este continuă pe $[0, \infty)$ cu $g(0) < 1$ şi $\lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$. Deci există $t_0 > 0$ astfel încât $\|x_0 + t_0 y_0\| = 1$. Rezultă că $x_0 + t_0 y_0 \in V \cap S$ ([1])

Am verificat aşadar că

$$S \subset B_E = \{x \in E;\ \|x\| \le 1\} \subset \overline{S}^{\sigma(E,E')}.$$

[1]Interpretarea geometrică a acestei construcţii este următoarea. In dimensiune **infinită** orice vecinătate V a lui x_0 pentru topologia slabă $\sigma(E, E')$ conţine o dreaptă trecând prin x_0 – şi chiar un "enorm" spaţiu afin trecând prin x_0.

Deducem apoi (1) dacă ştim că $\{x \in E; \|x\| \leq 1\}$ este închisă pentru topologia $\sigma(E, E')$ – aceasta rezultă din teorema III.7.

Exemplul 2. – Mulţimea $U = \{x \in E; \|x\| < 1\}$, cu E infinit dimensional, nu este **niciodată** deschisă în $\sigma(E, E')$. Mai precis, vom verifica faptul că interiorul lui U pentru $\sigma(E, E')$ este vid. Intr-adevăr, presupunem prin reducere la absurd, că U ar fi slab deschisă, deci complementara sa $U^c = \{x \in E; \|x\| \geq 1\}$ este slab închisă. Rezultă că $S = B_E \cap U^c$ este, de asemenea, slab închisă; aceasta contrazice însă Exemplul 1.

Remarca 3. – Dacă E este infinit dimensional, atunci topologia slabă $\sigma(E, E')$ **nu este metrizabilă**, adică nu există o metrică (deci şi o normă) definită pe E care induce pe E topologia slabă $\sigma(E, E')$; vezi [EX]. Totuşi vom vedea că dacă E' este **separabil**, atunci se poate construi o metrică definită pe B_E care induce pe B_E aceeaşi topologie ca şi topologia slabă $\sigma(E, E')$; vezi teorema III.25'.

$\star$ Remarca 4. – Dacă E este infinit dimensional, există **în general** şiruri care converg slab dar care nu converg tare. De exemplu, dacă E' este separabil (cf. §III.6) sau dacă E este **reflexiv** (cf. §III.5) atunci se poate construi **întotdeauna** un şir (x_n) în E astfel încât $\|x_n\| = 1$ şi $x_n \rightharpoonup 0$ slab în $\sigma(E, E')$; vezi [EX]. Totuşi există spaţii Banach infinit dimensionale în care orice şir slab convergent este convergent în topologia tare. De exemplu, $E = l^1$ are această proprietate "şocantă"; vezi [EX]. Totuşi aceste spaţii sunt destul de rare şi, oarecum, **"patologice"**. Bineînţeles, aceasta nu contrazice faptul că în dimensiune infinită topologia slabă şi topologia tare sunt **întotdeauna** distincte (cf. remarcii 2). [Reamintim că două spaţii **metrice** care au aceleaşi şiruri convergente, au aceeaşi topologie. Totuşi două spaţii **topologice** care au aceleaşi şiruri convergente nu au, **în mod necesar**, aceeaşi topologie.

III.3 Topologii slabe, mulţimi convexe şi operatori liniari

Orice mulţime închisă pentru topologia slabă $\sigma(E, E')$ este închisă pentru topologia tare. Am văzut deja (remarca 2) că reciproca este falsă în dimensiune infinită. Vom demonstra totuşi că pentru mulţimile **convexe** aceste două noţiuni coincid.

• **Teorema III.7. – Fie C o submulţime convexă a lui E. Atunci C este închisă în topologia slabă $\sigma(E, E')$ dacă şi numai dacă este închisă în topologia tare.**

Demonstraţie. – Presupunem că C este închisă în topologia tare şi arătăm că C este închisă în topologia slabă. Vom verifica că C^c este deschisă în topologia slabă. Pentru aceasta, fie $x_0 \notin C$. Conform teoremei lui Hahn–Banach, există un hiperplan închis care separă strict mulţimile $\{x_0\}$ şi C. Deci există $f \in E'$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\langle f, x_0 \rangle < \alpha < \langle f, y \rangle \quad \forall y \in C.$$

Fie

$$V = \{x \in E;\ \langle f, x \rangle < \alpha\};$$

deci $x_0 \in V$, $V \cap C = \emptyset$ (adică $V \subset C^c$) şi V este deschisă în topologia slabă.

Remarca 5. – Demonstraţia precedentă arată că un convex închis coincide cu intersecţia semispaţiilor închise care îl conţin. Pe de altă parte, teorema III.7 arată că dacă un şir (x_n) converge **slab** către x, atunci există un subşir de **combinaţii convexe** ale lui x_n care converge **tare** către x (teorema lui Mazur); vezi [EX].

• **Corolarul III.8. – Fie $\varphi : E \to (-\infty + \infty]$ o funcţie convexă şi *i.s.c.* (pentru topologia tare). Atunci φ este *i.s.c.* pentru topologia slabă $\sigma(E, E')$. In particular, dacă $x_n \rightharpoonup x$ pentru $\sigma(E, E')$, atunci**

$$\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

Demonstraţie. – Este suficient să verificăm că pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$, mulţimea

$$A = \{x \in E;\ \varphi(x) \leq \lambda\}$$

este închisă pentru $\sigma(E, E')$. Dar A este convexă (deoarece φ este convexă) şi A este tare închisă (pentru că φ este i.s.c. pentru topologia tare). Conform teoremei III.7, mulţimea A este, de asemenea, închisă pentru $\sigma(E, E')$.

REMARCA 6. – In particular, regăsim că dacă $x_n \rightharpoonup x$ pentru $\sigma(E,E')$, atunci $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$. Intr-adevăr, funcţia $\varphi(x) = \|x\|$ este convexă şi continuă pentru topologia tare, deci φ este i.s.c. pentru topologia tare – şi, în consecinţă, φ este i.s.c. pentru topologia slabă $\sigma(E,E')$.

Teorema III.9. – Fie E şi F două spaţii Banach. Fie T un operator liniar şi continuu de la E în F. Atunci T este continuu de la E înzestrat cu topologia slabă $\sigma(E,E')$ în F cu topologia slabă $\sigma(F,F')$ şi reciproc.

DEMONSTRAŢIE. – Conform propoziţiei III.2 este suficient să verificăm că pentru orice $f \in F'$, aplicaţia $x \mapsto \langle f, Tx\rangle$ este continuă de la E înzestrat cu topologia slabă $\sigma(E,E')$ în $\mathbf{R}$. Dar aplicaţia $x \mapsto \langle f, Tx\rangle$ este o funcţională liniară şi continuă pe E. Deci ea este continuă şi pentru topologia slabă $\sigma(E,E')$.

Reciproc, presupunem că T este liniară şi continuă de la E în F, ambele spaţii fiind înzestrate cu topologiile slabe. Atunci $G(T)$ este închisă în $E \times F$ înzestrat cu topologia $\sigma(E,E') \times \sigma(F,F')$, care este aceeaşi cu $\sigma(E \times F, (E \times F)')$. Rezultă că $G(T)$ este tare închis. Folosind teorema graficului închis (teorema II.7), deducem că T este continuu de la E în F, ambele spaţii fiind înzestrate cu topologia tare.

REMARCA 7. – Ipoteza "T liniar" din teorema III.9 joacă un rol esenţial în demonstraţie. O aplicaţie **neliniară** continuă de la E cu topologia tare în F cu topologia tare nu este în general continuă de la $\sigma(E,E')$ în $\sigma(F,F')$; vezi [EX].

III.4 Topologia ⋆ slabă $\sigma(E',E)$

Fie E un spaţiu Banach şi E' dualul său (înzestrat cu norma duală $\|f\| = \operatorname{Sup}_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} |\langle f,x\rangle|$) şi fie E'' bidualul său, adică dualul lui E', înzestrat cu norma

$$\|\xi\| = \operatorname{Sup}_{\substack{f\in E'\\ \|f\|\leq 1}} |\langle \xi, f\rangle|.$$

Avem o **injecţie canonică** $J : E \to E''$ definită astfel: pentru $x \in E$ fixat, aplicaţia $f \longmapsto \langle f, x\rangle$ de la E' în $\mathbf{R}$ este o funcţională liniară şi continuă pe E', adică un element al lui E'', notat Jx ([2]). Avem deci

$$\langle Jx, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \quad \forall x \in E,\ \forall f \in E'.$$

Este evident că J este liniară şi că J este o izometrie, adică $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$, pentru orice $x \in E$; într-adevăr,

$$\|Jx\| = \mathrm{Sup}_{\|f\|\le 1}|\langle Jx, f\rangle| = \mathrm{Sup}_{\|f\|\le 1}|\langle f, x\rangle| = \|x\|$$

(conform corolarului I.4). Se poate întâmpla ca J să **nu fie surjectiv** ([3]); vezi un exemplu în [EX]. Cu ajutorul lui J se poate întotdeauna **identifica** E **cu un subspaţiu al lui** E''.

Pe spaţiul E'' sunt deja definite două topologii:

a) topologia tare (asociată normei lui E'),

b) topologia slabă $\sigma(E', E'')$ (introdusă în §III.3).

Vom defini acum o **a treia** topologie pe E': topologia slabă $\star$, pe care o notăm cu $\sigma(E', E)$ ([4]). Pentru fiecare $x \in E$ considerăm aplicaţia $\varphi_x : E' \to \mathbf{R}$ definită prin $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle$. Când x parcurge E obţinem o familie de aplicaţii $(\varphi_x)_{x\in E}$ de la E' în $\mathbf{R}$.

Definiţie. – **Topologia slabă** $\star$ notată cu $\sigma(E', E)$ este topologia cea mai puţin fină pe E' pentru care toate aplicaţiile $(\varphi_x)_{x\in E}$ sunt continue.

Deoarece $E \subset E''$, este evident că topologia $\sigma(E', E)$ este mai puţin fină decât topologia $\sigma(E', E'')$. Altfel zis, topologia $\sigma(E', E)$ are mai puţine mulţimi deschise (resp. închise) decât topologia $\sigma(E', E'')$ [care, la rândul său, are mai puţini deschişi (resp. închişi) decât topologia tare].

REMARCA 8. – Cititorul se va mira de această “încrâncenare” în a sărăci topologiile. Motivul este următorul: dacă o topologie are **mai puţini deschişi**, atunci ea are, din contră, **mai mulţi compacţi**. Vom vedea, de exemplu, că bila unitate a lui E' are proprietatea remarcabilă de a fi compactă pentru topologia slabă $\star$ $\sigma(E', E)$. Dar mulţimile compacte

[2] A nu se confunda cu aplicaţia de dualitate $F : E \to E'$, introdusă în remarca I.2, care este în general neliniară (mai puţin în cazul Hilbertian).

[3] Dacă J este surjectiv spunem că E este **reflexiv**; vezi §III.5.

[4] Terminologia slabă $\star$ este o traducere a termenului englez **weak** $\star$; steaua reaminteşte că lucrăm pe dualul desemnat prin $E^\star$ în literatura americană.

joacă un rol fundamental în stabilirea teoremelor de **existenţă**. De aici rezultă importanţa acestei topologii.

Propoziţia III.10. – Topologia slabă $\star$ $\sigma(E', E)$ este separată.

DEMONSTRAŢIE. – Fie $f_1, f_2 \in E'$ cu $f_1 \neq f_2$. Există deci $x \in E$ astfel încât $\langle f_1, x\rangle \neq \langle f_2, x\rangle$ (aici nu se foloseşte teorema Hahn-Banach, ci definiţia lui $f_1 \neq f_2$). Pentru a fixa ideile, presupunem că $\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$ şi alegem α astfel încât

$$\langle f_1, x\rangle < \alpha < \langle f_2, x\rangle.$$

Fie

$$O_1 = \{f \in E';\ \langle f, x\rangle < \alpha\} = \varphi_x^{-1}((-\infty, \alpha))$$

$$O_2 = \{f \in E';\ \langle f, x\rangle > \alpha\} = \varphi_x^{-1}((\alpha, +\infty)).$$

Mulţimile O_1 şi O_2 sunt deschise în $\sigma(E', E)$ şi verifică $f_1 \in O_1, f_2 \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Propoziţia III.11. – Fie $f_0 \in E'$, o familie finită $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ în E şi $\varepsilon > 0$. Atunci

$$V = V(x_1, x_2, \ldots, x_k; \varepsilon) = \{f \in E'; |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k\}$$

este o vecinătate a lui f_0 pentru topologia $\sigma(E', E)$. Mai mult, se obţine o bază de vecinătăţi a lui f_0 pentru $\sigma(E', E)$ variind ε, k şi elementele x_i din E.

DEMONSTRAŢIE. – Este aceeaşi ca demonstraţia propoziţiei III.4.

Notaţie. – Dacă un şir (f_n) din E' converge la f în topologia slabă $\star$ $\sigma(E', E)$, vom scrie $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$. Pentru a evita confuziile vom preciza adesea "$f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ în $\sigma(E', E)$", "$f_n \rightharpoonup f$ în $\sigma(E', E'')$" şi "$f_n \to f$ tare".

• **Propoziţia III.12. – Fie (f_n) un şir în E'. Atunci**

(i) $[f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ **în** $\sigma(E', E)] \Leftrightarrow [\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle,\ \forall x \in E]$.

(ii) **Dacă $f_n \to f$ tare, atunci $f_n \rightharpoonup f$ în $\sigma(E', E'')$.**

Dacă $f_n \rightharpoonup f$ în $\sigma(E', E'')$, atunci $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ în $\sigma(E', E)$.

(iii) **Dacă $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ în $\sigma(E', E)$, atunci $\|f_n\|$ este mărginită şi $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.**

(iv) **Dacă** $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ **în** $\sigma(E', E)$ **şi dacă** $x_n \to x$ **tare în** E**, atunci** $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$**.**

Demonstraţie. – Se reia demonstraţia propoziţiei III.5.

Remarca 9. – Presupunem că $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ în $\sigma(E', E)$ (sau chiar că $f_n \rightharpoonup f$ în $\sigma(E', E''))$ şi $x_n \rightharpoonup x$ în $\sigma(E, E')$. Atunci **nu se poate deduce** în general că $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ (încercaţi să construiţi un exemplu într-un spaţiu Hilbert).

Remarca 10. – Dacă E este un spaţiu finit dimensional atunci cele trei topologii (tare, $\sigma(E', E'')$ şi $\sigma(E', E))$ definite pe E' coincid. Intr-adevăr, injecţia canonică $J : E \to E''$ este surjectivă (deoarece $\dim E = \dim E''$) şi, în consecinţă, $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$.

⋆ **Propoziţia III.13. – Fie** $\varphi : E' \to \mathbf{R}$ **o funcţională liniară şi continuă pentru topologia** $\sigma(E', E)$**. Atunci există** $x \in E$ **astfel încât**

$$\varphi(f) = \langle f, x\rangle \quad \forall f \in E'.$$

Demonstraţia face apel la o lemă algebrică foarte utilă.

Lema III.2. – Fie X **un spaţiu vectorial şi** $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ $(k + 1)$ **funcţionale liniare pe** X **astfel încât**

$$[\varphi_i(v) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k] \Rightarrow [\varphi(v) = 0]. \tag{2}$$

Atunci există $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ **astfel încât** $\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i$**.**

Demonstraţia lemei III.2. – Considerăm aplicaţia $F : X \to \mathbf{R}^{k+1}$ definită prin

$$F(u) = [\varphi(u), \varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_k(u)].$$

Rezultă din ipoteza (2) că $a = [1, 0, 0, \ldots, 0]$ nu aparţine lui $R(F)$. Putem deci separa în sens strict mulţimile $\{a\}$ şi $R(F)$ printr-un hiperplan în $\mathbf{R}^{k+1}$, adică există $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ şi α astfel încât

$$\lambda < \alpha < \lambda\varphi(u) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(u) \quad \forall u \in X.$$

Rezultă că

$$\lambda\varphi(u) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(u) = 0 \quad \forall u \in X$$

şi $\lambda < 0$ (de unde $\lambda \neq 0$).

DEMONSTRAŢIA PROPOZIŢIEI III.13. – Deoarece φ este continuă pentru $\sigma(E', E)$, există o vecinătate V a lui 0 pentru $\sigma(E', E)$ astfel încât

$$|\varphi(f)| < 1 \quad \forall f \in V.$$

Putem presupune că V este de forma

$$V = \{f \in E'; |\langle f, x_i\rangle| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k\},$$

cu $x_i \in E$ şi $\varepsilon > 0$. In particular,

$$[\langle f, x_i\rangle = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k] \Rightarrow [\varphi(f) = 0].$$

Rezultă din lema III.2 că

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle f, x_i\rangle = \langle f, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\rangle \quad \forall f \in E'.$$

⋆ **Corolarul III.14. – Presupunem că H este un hiperplan în E' care este închis în $\sigma(E', E)$. Atunci H este de forma**

$$H = \{f \in E'; \langle f, x\rangle = \alpha\}$$

pentru un anumit $x \in E, x \neq 0$, şi un anume $\alpha \in \mathbf{R}$.

DEMONSTRAŢIE. – Mulţimea H este de forma

$$H = \{f \in E'; \ \varphi(f) = \alpha\}$$

unde φ este o funcţională liniară pe E', $\varphi \not\equiv 0$. Fie $f_0 \notin H$ şi fie V o vecinătate a lui f_0 pentru topologia $\sigma(E', E)$ astfel încât $V \subset H^c$. Putem presupune că

$$V = \{f \in E'; |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k\}.$$

Deoarece V este convexă, avem următoarea alternativă:

fie

$$\varphi(f) < \alpha \quad \forall f \in V \tag{3}$$

fie

$$(3') \qquad \varphi(f) > \alpha \quad \forall f \in V.$$

Din (3) deducem că

$$\varphi(g) < \alpha - \varphi(f_0) \quad \forall g \in W = V - f_0,$$

şi cum $-W = W$, obţinem

$$(4) \qquad |\varphi(g)| \leq |\alpha - \varphi(f_0)| \quad \forall g \in W.$$

Ajungem la aceeaşi concluzie sub ipoteza (3′). Rezultă din (4) că φ este continuă în 0 pentru topologia $\sigma(E', E)$ (deoarece W este o vecinătate a lui 0). Aplicând propoziţia III.13 deducem că există $x \in E$ astfel încât

$$\varphi(f) = \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E'.$$

Remarca 11. – Presupunem că injecţia canonică $J : E \to E''$ **nu** este surjectivă, adică $E \neq E''$. Există chiar mulţimi **convexe şi închise** pentru $\sigma(E', E'')$ care nu sunt închise pentru $\sigma(E', E)$. Atunci topologia $\sigma(E', E)$ este **strict** mai puţin fină decât topologia $\sigma(E', E'')$. De exemplu, fie $\xi \in E''$ cu $\xi \notin J(E)$. Atunci mulţimea

$$H = \{f \in E';\ \langle \xi, f \rangle = 0\}$$

este un hiperplan închis în $\sigma(E', E'')$ dar nu este închis pentru $\sigma(E', E)$ (vezi corolarul III.14). Reţinem că există **două tipuri de mulţimi convexe şi închise** în E':

a) mulţimi convexe care sunt tare închise [sau închise pentru $\sigma(E', E'')$ – ceea ce revine la acelaşi lucru, conform teoremei III.7].

b) mulţimi convexe şi închise pentru $\sigma(E', E)$.

• **Teorema III.15 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). – Mulţimea**

$$B_{E'} = \{f \in E';\ \|f\| \leq 1\}$$

este compactă pentru topologia $\star$ $\sigma(E', E)$**.**

Remarca 12. – Vom vedea în continuare (teorema VI.5) că **bila unitate închisă a unui spaţiu normat infinit dimensional nu este niciodată compactă pentru topologia tare**. Vom înţelege atunci importanţa **fundamentală** a topologiei $\sigma(E', E)$ şi a teoremei III.15.

Demonstraţie. – Considerăm spaţiul produs $Y = \mathbf{R}^E$; notăm elementele lui Y prin $\omega = (\omega_x)_{x \in E}$, cu $\omega_x \in \mathbf{R}$. Spaţiul Y este înzestrat cu **topologia produs** (vezi de exemplu Dixmier [1] sau L. Schwartz [2]), adică topologia cea mai puţin fină pe Y astfel încât toate aplicaţiile $\omega \mapsto \omega_x$ (când x parcurge E) să fie continue. In cele ce urmează spaţiul E' va fi înzestrat sistematic cu topologia slabă $\sigma(E', E)$. Considerăm aplicaţia $\Phi : E' \to Y$ definită prin $\Phi(f) = (\langle f, x\rangle)_{x \in E}$. Atunci Φ este continuă de la E' în Y (observăm că pentru orice $x \in E$ fixat, aplicaţia $f \in E' \mapsto (\Phi(f))_x = \langle f, x\rangle$ este continuă şi aplicăm apoi propoziţia III.2). Arătăm că Φ este un homeomorfism de la E' în $\Phi(E')$. Este evident că Φ este injectivă; să verificăm că Φ^{-1} este continuă. Este suficient (conform propoziţiei III.2) să arătăm că pentru orice $x \in E$ fixat, aplicaţia $\omega \mapsto \langle \Phi^{-1}(\omega), x\rangle$ este continuă pe $\Phi(E')$, ceea ce este evident deoarece $\langle \Phi^{-1}(\omega), x\rangle = \omega_x$. Pe de altă parte, este clar că $\Phi(B_{E'}) = K$, unde

$$\begin{aligned} K = \ & \{\omega \in Y; |\omega_x| \le \|x\|,\ \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y,\ \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x, \\ & \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \forall x, y \in E\}. \end{aligned}$$

Pentru a completa demonstraţia este suficient să arătăm că mulţimea K este un compact din Y. Scriem $K = K_1 \cap K_2$, unde

$$K_1 = \{\omega \in Y;\ |\omega_x| \le \|x\|, \quad \forall x \in E\}$$

$$K_2 = \{\omega \in Y; \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y,\ \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \forall x, y \in E\}.$$

Mulţimea $K_1 = \prod_{x \in E} [-\|x\|, +\|x\|]$ este compactă (ca produs de intervale compacte – reamintim că un produs de spaţii compacte este compact, vezi Dixmier [1], L. Schwartz [2]). Pe de altă parte, K_2 este închisă; într-adevăr, pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$, $x, y \in E$ **fixaţi**, mulţimile

$$A_{x,y} = \{\omega \in Y; \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y = 0\}$$

$$B_{\lambda,x} = \{\omega \in Y; \omega_{\lambda x} - \lambda \omega_x = 0\}$$

sunt închise (deoarece aplicaţiile $\omega \mapsto \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y$ şi $\omega \mapsto \omega_{\lambda x} - \lambda\omega_x$ sunt continue) şi

$$K_2 = \left(\bigcap_{x,y \in E} A_{x,y} \right) \bigcap \left(\bigcap_{\substack{x \in E \\ \lambda \in \mathbf{R}}} B_{\lambda,x} \right).$$

III.5 Spaţii reflexive

Definiţie. – Fie E un spaţiu Banach şi fie $J : E \to E''$ injecţia canonică de la E în E'' (vezi §III.4). Spunem că E este **reflexiv** dacă $J(E) = E''$.

Dacă E este reflexiv, identificăm în mod implicit E şi E'' (cu ajutorul izomorfismului J).

$\star$ Remarca 13. – Este esenţial să utilizăm J în definiţia precedentă. Putem construi (vezi James [1]) un exemplu surprinzător de spaţiu nereflexiv E pentru care există o izometrie surjectivă de la E pe E''.

Rezultatul următor oferă o caracterizare importantă a spaţiilor reflexive.

• Teorema III.16 (Kakutani). – Fie E un spaţiu Banach. Atunci E este reflexiv dacă şi numai dacă

$$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$$

este compactă în topologia $\sigma(E, E')$.

Demonstraţie. – Să presupunem mai întâi că E este reflexiv. Deci $J(B_E) = B_{E''}$. Pe de altă parte (teorema III.15), $B_{E''}$ este compactă în topologia $\sigma(E'', E')$. Deci este suficient să verificăm că J^{-1} este continuă de la E'' înzestrat cu topologia slabă $\sigma(E'', E')$, cu valori în E cu topologia $\sigma(E, E')$. Rămâne de demonstrat (cf. propoziţiei III.2) că pentru orice $f \in E'$ fixat, aplicaţia $\xi \mapsto \langle f, J^{-1}\xi \rangle$ este continuă pe E'' înzestrat cu $\sigma(E'', E')$. Dar $\langle f, J^{-1}\xi \rangle = \langle \xi, f \rangle$ şi aplicaţia $\xi \mapsto \langle \xi, f \rangle$ este continuă pe E'' înzestrat cu topologia $\sigma(E'', E')$. Deci am arătat că B_E este compactă în $\sigma(E, E')$.

Pentru a stabili reciproca vom avea nevoie de următoarele două leme:

Lema III.3 (Helly). – Fie E un spaţiu Banach, $f_1, f_2, \ldots, f_k \in E'$ şi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in \mathbf{R}$ fixate.

Proprietăţile următoare sunt echivalente:
(i) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in E$ **astfel încât** $\|x_\varepsilon\| \leq 1$ **şi**

$$|\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \gamma_i| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k,$$

(ii) $\left|\sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i\right\|, \quad \forall \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbf{R}$**.**

DEMONSTRAŢIE.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Fixăm $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ în $\mathbf{R}$ şi fie $S = \sum_{i=1}^{k} |\beta_i|$. Rezultă din (i) că

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \beta_i \langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i\right| \leq \varepsilon S$$

şi deci

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i\right\|, \ \|x_\varepsilon\| + \varepsilon S \leq \left\|\sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i\right\| + \varepsilon S, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

de unde (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Fie $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k) \in \mathbf{R}^k$ şi considerăm aplicaţia $\vec{\varphi} : E \to \mathbf{R}^k$ definită prin

$$\vec{\varphi}(x) = (\langle f_1, x \rangle, \ldots, \langle f_k, x \rangle).$$

Proprietatea (i) afirmă că $\vec{\gamma} \in \overline{\varphi(B_E)}$. Presupunem, prin reducere la absurd, că $\vec{\gamma} \notin \overline{\varphi(B_E)}$. Deci mulţimile $\{\vec{\gamma}\}$ şi $\overline{\varphi(B_E)}$ pot fi separate în sens strict în $\mathbf{R}^k$, adică există $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) \in \mathbf{R}^k$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\varphi}(x) < \alpha < \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \quad \forall x \in B_E.$$

Rezultă că

$$\left|\langle \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i, x \rangle\right| < \alpha < \sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i \quad \forall x \in B_E$$

şi deci

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i,$$

ceea ce contrazice (ii).

Lema III.4 (Goldstine). – Fie E un spaţiu Banach. Atunci $J(B_E)$ este densă în $B_{E''}$ pentru topologia $\sigma(E'', E')$.

Demonstraţie. – Fie $\xi \in B_{E''}$ şi V o vecinătate a lui ξ pentru topologia $\sigma(E'', E')$. Trebuie să arătăm că $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$. Putem presupune că V este de forma

$$V = \{\eta \in E''; \ |\langle \eta - \xi, f_i \rangle| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Căutăm să găsim $x \in B_E$ astfel încât

$$|\langle f_i, x \rangle - \langle \xi, f_i \rangle| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k.$$

Fie $\gamma_i = \langle \xi, f_i \rangle$ şi observăm că $\forall \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbf{R}$ avem

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i \right| = \left| \langle \xi, \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i \rangle \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i \right\|$$

(deoarece $\|\xi\| \leq 1$). Conform lemei III.3, există $x_\varepsilon \in B_E$ astfel încât $|\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \gamma_i| < \varepsilon$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$, adică $J(x_\varepsilon) \in J(B_E) \cap V$.

Remarca 14. – Observăm că $J(B_E)$ este **închisă** în $B_{E''}$ pentru topologia **tare** (se utilizează faptul că B_E este complet şi că J este o izometrie). Deci, în general, $J(B_E)$ nu este dens în $B_{E''}$ pentru topologia tare – cu excepţia cazului în care E este reflexiv, atunci când $J(B_E) = B_{E''}$.

Remarca 15. – Vom găsi în [EX] o demonstraţie directă a lemei III.4, bazată pe o aplicare a teoremei lui Hahn-Banach în E''.

Remarca 16. – Bineînţeles, spaţiile de dimensiune finită sunt reflexive.

Sfârşitul demonstraţiei teoremei III.16. – Presupunem acum că B_E este compactă pentru topologia $\sigma(E, E')$.

Observăm mai întâi că injecţia canonică $J : E \to E''$ este întotdeauna continuă pentru topologiile tari şi deci (teorema III.9), J este de asemenea continuă pentru topologiile slabe $\sigma(E, E') \to \sigma(E'', E')$. Deci $J(B_E)$ este compactă pentru topologia $\sigma(E'', E')$. Dar $J(B_E)$ este densă în $B_{E''}$ pentru topologia $\sigma(E'', E')$ (lema III.4). Rezultă că $J(B_E) = B_{E''}$ şi deci $J(E) = E''$.

Indicăm acum câteva proprietăţi elementare ale spaţiilor reflexive.

• **Teorema III.17. – Fie E un spaţiu Banach reflexiv şi fie $M \subset E$ un subspaţiu liniar închis. Atunci M – înzestrat cu norma indusă de E – este reflexiv.**

DEMONSTRAŢIE. – Observăm mai întâi că pe M sunt definite două topologii slabe:
(a) Topologia indusă de $\sigma(M, M')$.
(b) Urma pe M a topologiei $\sigma(E, E')$.
Se verifică cu uşurinţă ("jucând" cu restricţii şi prelungiri ale formelor liniare) că aceste două topologii coincid.

Conform teoremei III.16, trebuie demonstrat că B_M este compactă în topologia $\sigma(M, M')$. Dar B_E este compactă pentru topologia $\sigma(E, E')$ şi M este închisă în topologia $\sigma(E, E')$ (teorema III.7). Deci B_M este compactă pentru topologia $\sigma(E, E')$ şi, în consecinţă, pentru topologia $\sigma(M, M')$.

Corolarul III.18. – Un spaţiu Banach E este reflexiv daă şi numai dacă E' este reflexiv.

DEMONSTRAŢIE. – E **reflexiv** $\Rightarrow$ E' **reflexiv**. Ştim deja (teorema III.15) că $B_{E'}$ este compactă pentru $\sigma(E', E)$. Pe de altă parte avem $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$, pentru că E este reflexiv. Deci $B_{E'}$ este compactă pentru $\sigma(E', E'')$, adică E' este reflexiv (teorema III.16).

E' **reflexiv** $\Rightarrow$ E **reflexiv**. Din etapa precedentă ştim că E'' este reflexiv. Deoarece $J(E)$ este un subspaţiu închis al lui E'', rezultă că $J(E)$ este reflexiv. Deci E este reflexiv. ([5])

• **Corolarul III.19. – Fie E un spaţiu Banach reflexiv. Fie $K \subset E$ o submulţime convexă, închisă şi mărginită. Atunci K este compactă pentru topologia $\sigma(E, E')$.**

DEMONSTRAŢIE. – K este închisă pentru topologia $\sigma(E, E')$ (teorema III.7). Pe de altă parte, există o constantă m astfel încât $K \subset mB_E$ şi mB_E este compactă pentru topologia $\sigma(E, E')$ (teorema III.16).

[5]Este evident că dacă E şi F sunt spaţii Banach şi T este o izometrie surjectivă de la E în F, atunci E este reflexiv dacă şi numai dacă F este reflexiv. Acest rezultat nu este în contradicţie cu remarca 13!

• **Corolarul III.20. – Fie E un spaţiu Banach reflexiv, $A \subset E$ o mulţime convexă, închisă, nevidă şi $\varphi : A \to (-\infty, +\infty]$ convexă, i.s.c., $\varphi \not\equiv +\infty$ şi astfel încât**

(5)
$$\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\| \to \infty}} \varphi(x) = +\infty \quad \textbf{(nici o presupunere dacă } A \textbf{ este mărginită)}.$$

Atunci φ îşi atinge minimul pe A, adică există $x_0 \in A$ astfel încât $\varphi(x_0) = \mathrm{Min}_A\, \varphi$.

DEMONSTRAŢIE. – Fixăm $a \in A$ astfel încât $\varphi(a) < +\infty$. Considerăm mulţimea

$$\tilde{A} = \{x \in A;\ \varphi(x) \le \varphi(a)\}.$$

$\tilde{A}$ este închisă, convexă, mărginită (cf. (5)) şi deci **compactă** pentru topologia $\sigma(E, E')$. Pe de altă parte, φ este i.s.c. pentru topologia $\sigma(E, E')$ (corolarul III.8). Rezultă că φ îşi atinge minimul pe $\tilde{A}$, adică există $x_0 \in \tilde{A}$ astfel încât

$$\varphi(x_0) \le \varphi(x) \quad \forall x \in \tilde{A}.$$

Dacă $x \in A \setminus \tilde{A}$ avem $\varphi(x_0) \le \varphi(a) < \varphi(x)$; deci

$$\varphi(x_0) \le \varphi(x) \quad \forall x \in A.$$

REMARCA 17. – Corolarul III.20 explică **rolul esenţial** jucat de spaţiile **reflexive** şi funcţiile **convexe** în calculul variaţional, controlul optimal, etc.

Teorema III.21. – Fie E şi F două spaţii Banach reflexive. Fie $A : D(A) \subset E \to F$ un operator liniar, nemărginit şi dens definit. Atunci $D(A^\star)$ este dens în F'.

Aceasta permite să definim $A^{\star\star} : D(A^{\star\star}) \subset E'' \to F''$ şi să considerăm $A^{\star\star}$ ca pe un operator nemărginit de la E în F.

Atunci

$$\boxed{A^{\star\star} = A}.$$

DEMONSTRAŢIE.

1) $D(A^\star)$ **este dens** în F'. Fie φ o funcţională liniară şi continuă pe F', nulă pe $D(A')$. Incercăm să demonstrăm (corolarul I.8) că $\varphi \equiv 0$. Deoarece F este reflexiv, putem presupune că $\varphi \in F$ şi că

$$\langle w, \varphi \rangle = 0 \qquad \forall w \in D(A^\star). \tag{6}$$

Dacă $\varphi \neq 0$, atunci $[0, \varphi] \notin G(A)$ în $E \times F$. Deci putem separa în sens strict mulţimile $[0, \varphi]$ şi $G(A)$ printr-un hiperplan închis în $E \times F$; adică există $[f, v] \in E' \times F'$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\langle f, u \rangle + \langle v, Au \rangle < \alpha < \langle v, \varphi \rangle \quad \forall u \in D(A).$$

In particular, rezultă că

$$\langle f, u \rangle + \langle v, Au \rangle = 0 \quad \forall u \in D(A)$$

şi

$$\langle v, \varphi \rangle \neq 0.$$

Deci $v \in D(A^\star)$ şi obţinem o contradicţie alegând $w = v$ în (6).

2) $A^{\star\star} = A$.

Reamintim (vezi §II.6) relaţiile

$$J[G(A^\star)] = G(A)^\perp$$

şi

$$J[G(A^{\star\star})] = G(A^\star)^\perp.$$

De aici rezultă că

$$G(A^{\star\star}) = G(A)^{\perp\perp} = G(A)$$

deoarece A este închis.

III.6 Spaţii separabile

Definiţie. – Un spaţiu metric E se numeşte **separabil** dacă există o submulţime $D \subset E$ numărabilă şi densă.

Propoziţia III.22. – Fie E un spaţiu metric separabil şi fie $F \subset E$ o submulţime a lui E. Atunci F este separabil.

DEMONSTRAŢIE. – Fie (u_n) un şir dens în E. Fie (r_m) un şir de numere reale pozitive astfel încât $r_m \to 0$. Alegem în mod arbitrar $a_{m,n} \in B(u_n, r_m) \cap F$, dacă această mulţime este nevidă. Este evident că şirul $(a_{m,n})$ constituie o mulţime numărabilă şi densă în F.

Teorema III.23. – Fie E un spaţiu Banach astfel încât E' este separabil. Atunci E este separabil.

REMARCA 18. – Reciproca nu este adevărată. Există spaţii Banach separabile E astfel încât E' nu este separabil; de exemplu, $E = L^1(\Omega)$ (vezi capitolul IV).

DEMONSTRAŢIE. – Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ o familie numărabilă şi densă în E'. Deoarece

$$\|f_n\| = \operatorname{Sup}_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} \langle f_n, x\rangle,$$

există $x_n \in E$ astfel încât

$$\|x_n\| = 1 \text{ şi } \langle f_n, x_n\rangle \geq \frac{1}{2}\|f_n\|.$$

Notăm cu L_0 spaţiul vectorial peste $\mathbf{Q}$ generat de $(x_n)_{n\geq 1}$; adică L_0 este mulţimea combinaţiilor liniare **finite** cu coeficienţi în $\mathbf{Q}$ de elemente din familia $(x_n)_{n\geq 1}$. Observăm că L_0 este **numărabilă**. Intr-adevăr, pentru orice n, fie Λ_n spaţiul vectorial peste $\mathbf{Q}$ generat de $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Atunci Λ_n este în corespondenţă bijectivă cu o submulţime a lui $\mathbf{Q}^n$ şi $L_0 = \bigcup_{n\geq 1} \Lambda_n$.

Fie L spaţiul vectorial peste $\mathbf{R}$ generat de $(x_n)_{n\geq 1}$. Este evident că L_0 este o submulţime densă a lui L. Verificăm că L este densă în E (de unde va rezulta că L_0 este densă în E şi deci că E este separabil). Fie $f \in E'$ astfel încât $\langle f, x\rangle = 0$ pentru orice $x \in L$; să arătăm (corolarul I.8) că $f = 0$. Fiind dat $\varepsilon > 0$, există N astfel încât $\|f - f_N\| < \varepsilon$. Avem

$$\frac{1}{2}\|f_N\| \leq \langle f_N, x_N\rangle = \langle f_N - f, x_N\rangle + \langle f, x_n\rangle \leq \varepsilon$$

(deoarece $\langle f, x_N\rangle = 0$). Rezultă că $\|f\| \leq \|f - f_N\| + \|f_N\| < 3\varepsilon$. Deci $f = 0$.

Corolarul III.24. – Fie E un spaţiu Banach. Atunci

$$[E \textbf{ reflexiv şi separabil}] \Leftrightarrow [E' \textbf{ reflexiv şi separabil}].$$

DEMONSTRAŢIE. – Ştim deja (corolarul III.18 şi teorema III.23) că

$$[E' \text{ reflexiv şi separabil}] \Rightarrow [E \text{ reflexiv şi separabil}].$$

Invers, dacă E este reflexiv şi separabil, atunci $E'' = J(E)$ este reflexiv şi separabil; deci E' este reflexiv şi separabil.

Proprietăţile de **separabilitate** sunt strâns legate de **metrizabilitatea** topologiilor slabe.

Teorema III.25. – Fie E un spaţiu Banach separabil. Atunci $B_{E'}$ este metrizabilă pentru topologia $\sigma(E', E)$ ([6]).

Reciproc, dacă $B_{E'}$ este metrizabilă pentru $\sigma(E', E)$, atunci E este separabil.

REMARCA 19. – Spaţiul **întreg** E' nu este niciodată metrizabil pentru $\sigma(E', E)$, cu excepţia cazului finit dimensional (vezi [EX]).

DEMONSTRAŢIE. – Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ o submulţime numărabilă densă în B_E (se ia D numărabilă şi densă în E şi se consideră $D \cap B_E$). Pentru $f, g \in B_{E'}$ se defineşte

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - g, x_n \rangle|.$$

Este evident că d este o metrică. Arătăm că topologia asociată lui d coincide pe $B_{E'}$ cu $\sigma(E', E)$.

(a) Fie $f_0 \in B_{E'}$ şi fie V o vecinătate a lui f_0 pentru $\sigma(E', E)$. Arătăm că există $r > 0$ astfel încât

$$U = \{f \in B_{E'};\, d(f, f_0) < r\} \subset V.$$

Putem presupune că V este de forma

$$V = \{f \in B_{E'}; |\langle f - f_0, y_i \rangle| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k\}$$

cu $\varepsilon > 0$ şi $y_1, y_2, \ldots, y_k \in E$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $\|y_i\| \leq 1$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, k$. Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este dens în B_E, pentru fiecare i, există un întreg n_i astfel încât $\|y_i -$

---

[6] Adică există o metrică definită pe $B_{E'}$ astfel încât topologia asociată coincide pe $B_{E'}$ cu $\sigma(E', E)$.

$x_{n_i}\| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. **Fixăm** $r > 0$ astfel încât $2^{n_i} r < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, k$; arătăm că $U \subset V$. Intr-adevăr, dacă $d(f, f_0) < r$, atunci

$$\frac{1}{2^{n_i}} |\langle f - f_0, x_{n_i} \rangle| < r, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$$

şi deci

$$|\langle f - f_0, y_i \rangle| = |\langle f - f_0, y_i - x_{n_i} \rangle + \langle f - f_0, x_{n_i} \rangle| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Rezultă că $f \in V$.

(b) Fie $f_0 \in B_{E'}$. Fixăm $r > 0$ şi arătăm că există o vecinătate V a lui f_0 pentru $\sigma(E', E)$ în $B_{E'}$ astfel încât

$$V \subset U = \{f \in B_{E'};\ d(f, f_0) < r\}.$$

Vom lua V de forma

$$V = \{f \in B_{E'};\ |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Vom determina acum ε şi k astfel încât $V \subset U$. Dacă $f \in V$ atunci

$$d(f, f_0) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n \rangle| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n \rangle| <$$

$$< \varepsilon + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon + \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Alegem aşadar $\varepsilon = \dfrac{r}{2}$ şi k suficient de mare astfel încât $\dfrac{1}{2^{k-1}} < \dfrac{r}{2}$.

$\star$ **Reciproc**, presupunem că $B_{E'}$ este metrizabilă pentru $\sigma(E', E)$ şi arătăm că E este separabil. Fie

$$U_n = \{f \in B_{E'};\ d(f, 0) < 1/n\}$$

şi fie V_n o vecinătate a lui 0 în $\sigma(E', E)$ astfel încât $V_n \subset U_n$. Putem presupune că V_n este de forma

$$V_n = \{f \in B_{E'}; |\langle f, x \rangle| < \varepsilon_n, \quad \forall x \in \Phi_n\},$$

unde $\varepsilon_n > 0$ şi Φ_n este o submulţime finită a lui E. Observăm că $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ este numărabilă. Pe de altă parte,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{0\} \quad \text{şi deci} \quad (\langle f, x\rangle = 0 \ \ \forall x \in D) \Rightarrow (f = 0).$$

Rezultă că spaţiul vectorial generat de D este dens în E, de unde rezultă că E este separabil.

Avem următorul rezultat "simetric".

$\star$ **Teorema III.25'. – Fie E un spaţiu Banach astfel încât E' este separabil. Atunci B_E este metrizabilă pentru topologia $\sigma(E, E')$. Reciproca este adevărată.**

Demonstraţia implicaţiei [E' separabil] $\Rightarrow$ [B_E metrizabilă pentru topologia $\sigma(E, E')$] este aceeaşi cu demonstraţia teoremei III.25 schimbând rolurile lui E şi E'. Reciproca este mai delicată; vezi de exemplu Dunford–Schwartz [1] sau [EX].

• **Corolarul III.26. – Fie E un spaţiu Banach separabil şi (f_n) un şir mărginit în E'. Atunci există un subşir (f_{n_k}) care converge în topologia $\sigma(E', E)$.**

Demonstraţie. – Pentru a fixa ideile, presupunem că $\|f_n\| \le 1$ pentru orice n. Mulţimea $B_{E'}$ este compactă şi metrizabilă pentru topologia $\sigma(E', E)$ (teoremele III.15 şi III.25). De aici rezultă concluzia.

• **Teorema III.27. – Fie E un spaţiu Banach reflexiv şi (x_n) un şir mărginit în E. Atunci există un subşir (x_{n_k}) care converge în topologia $\sigma(E, E')$.**

Demonstraţie. – Fie M_0 spaţiul vectorial generat de (x_n) şi $M = \overline{M}_0$. Evident, M este separabil (vezi demonstraţia teoremei III.23). In plus, M este reflexiv (conform propoziţiei III.17). Rezultă că B_M este compactă şi metrizabilă pentru topologia $\sigma(M, M')$. Intr-adevăr, M' este separabil (corolarul III.24) şi, prin urmare, $B_{M''}$ $(= B_M)$ este metrizabilă pentru $\sigma(M'', M')$ $(= \sigma(M, M'))$, conform teoremei III.25. Se poate extrage deci un subşir (x_{n_k}) care este convergent pentru topologia $\sigma(M, M')$. Deducem că (x_{n_k}) converge şi pentru topologia $\sigma(E, E')$ (prin restricţia la M a funcţionalelor liniare şi continue pe E).

REMARCA 20. – Reciproca teoremei III.27 este adevărată. Mai precis, avem

⋆ **Teorema III.28 (Eberlein-Šmulian). – Fie E un spaţiu Banach cu proprietatea că din orice şir mărginit se poate extrage un subşir convergent pentru topologia $\sigma(E, E')$. Atunci E este reflexiv.**

Demonstraţia este delicată; vezi de exemplu Holmes [1], Yosida [1], Dunford-Schwartz [1], Diestel [2] sau [EX]. Pentru a preciza interesul teoremei III.28 reamintim că:

i) un spaţiu **topologic** (general) în care orice şir conţine un subşir convergent **nu este**, în mod necesar, compact.

ii) într-un spaţiu **topologic** compact pot exista şiruri care nu au nici un subşir convergent.

iii) într-un spaţiu **metric**

$$(\text{compact}\ ) \Longleftrightarrow (\ \text{orice şir are un subşir convergent}).$$

Există efectiv exemple de spaţii Banach E şi de şiruri mărginite (f_n) în E' care nu au nici un subşir convergent pentru topologia $\sigma(E', E)$; vezi [EX]. Bineînţeles, un asemenea spaţiu E nu este nici reflexiv, nici separabil; în acest caz, mulţimea $B_{E'}$ înzestrată cu topologia $\sigma(E', E)$ este un compact care nu este metrizabil.

III.7 Spaţii uniform convexe

Definiţie. – Un spaţiu Banach E se numeşte **uniform convex** dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încât

$$(x, y \in E, \|x\| \le 1, \|y\| \le 1 \text{ şi } \|x - y\| > \varepsilon) \Rightarrow \left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta\right).$$

Observăm că această definiţie face să intervină o proprietate **geometrică** a bilei unitate (care trebuie să fie “foarte rotundă”) şi că ea nu este stabilă prin trecerea la o normă echivalentă.

Exemplul 1. – Fie $E = \mathbf{R}^2$. Norma $\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)^{1/2}$ este uniform convexă, în timp ce norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ nu este uniform convexă. Acest lucru poate fi observat “privind” imaginile bilelor unitate ([7]).

Exemplul 2. – Vom vedea în continuare (cf. capitolelor IV şi V) că spaţiile Hilbert sunt uniform convexe, precum şi spaţiile L^p, pentru $1 < p < \infty$. Din contră, spaţiile $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ şi $C(K)$ (K compact) nu sunt uniform convexe.

• **Teorema III.29 (Milman–Pettis). – Orice spaţiu Banach uniform convex este reflexiv.**

Remarca 21. – Este surprinzător că o proprietate de natură **geometrică** (uniform convexitatea) antrenează o proprietate de natură **topologică** (reflexivitatea). Uniform convexitatea este adesea un instrument comod pentru a demonstra că un spaţiu este reflexiv [dar această metodă nu funcţionează întotdeauna: există spaţii reflexive care nu au nici o normă echivalentă uniform convexă].

Demonstraţie. – Fie $\xi \in E''$ cu $\|\xi\| = 1$. Trebuie să arătăm că $\xi \in J(B_E)$. Cum $J(B_E)$ este închisă în E'' pentru topologia tare, este suficient să demonstrăm că

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in B_E \text{ astfel încât } \|\xi - J(x)\| \le \varepsilon. \tag{6}$$

Fie deci $\varepsilon > 0$ şi fie $\delta > 0$ corespunzător definiţiei uniform convexităţii. Alegem $f \in E'$ astfel încât $\|f\| = 1$ şi

$$\langle \xi, f \rangle > 1 - \frac{\delta}{2} \tag{7}$$

(acest lucru este posibil deoarece $\|\xi\| = 1$). Fie

$$V = \left\{ \eta \in E'';\ |\langle \eta - \xi, f \rangle| < \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Deci V este o vecinătate a lui ξ în topologia $\sigma(E'', E')$. Conform lemei III.4, $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$. Fixăm $x \in B_E$ astfel încât $J(x) \in V$.

[7] Cu titlu de exerciţiu, faceţi raţionamentul cu ε şi δ!

Arătăm că $\xi \in J(x) + \varepsilon B_{E''}$ – ceea ce va încheia demonstraţia. Raţionăm prin absurd şi presupunem că $\xi \in (J(x) + \varepsilon B_{E''})^c = W$. Observăm că W este o vecinătate a lui ξ în topologia $\sigma(E'', E')$ (pentru că $B_{E''}$ este închisă în $\sigma(E'', E')$). Aplicând din nou lema III.4 avem $(V \cap W) \cap J(B_E) \neq \emptyset$, adică există $y \in B_E$ astfel încât $J(y) \in V \cap W$. Observând că $J(x), J(y) \in V$, avem

$$|\langle f, x\rangle - \langle \xi, f\rangle| < \frac{\delta}{2}$$

şi

$$|\langle f, y\rangle - \langle \xi, f\rangle| < \delta/2.$$

Prin adunarea acestor inegalităţi obţinem

$$2\langle \xi, f\rangle < \langle f, x + y\rangle + \delta \leq \|x + y\| + \delta.$$

Folosind acum (7) obţinem

$$\left\|\frac{x + y}{2}\right\| \geq 1 - \delta.$$

In consecinţă (din uniform convexitate), $\|x - y\| \leq \varepsilon$; acest lucru este absurd căci $J(y) \in W$ (adică $\|x - y\| > \varepsilon$).

Incheiem cu o proprietate utilă a spaţiilor uniform convexe.

Propoziţie III.30. – Fie E un spaţiu Banach uniform convex. Fie (x_n) un şir în E astfel încât $x_n \rightharpoonup x$ pentru topologia slabă $\sigma(E, E')$ şi

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Atunci $x_n \to x$ în topologia tare.

Demonstraţie. – Putem presupune că $x \neq 0$ (dacă nu, concluzia este evidentă). Fie

$$\lambda_n = \text{Max}\,(\|x_n\|, \|x\|), \;\; y_n = \lambda_n^{-1} x_n \quad \text{şi} \quad y = \|x\|^{-1} x,$$

adică $\lambda_n \to \|x\|$ şi $y_n \rightharpoonup y$ slab în $\sigma(E, E')$. Rezultă că

$$\|y\| \leq \liminf \left\|\frac{y_n + y}{2}\right\|$$

(cf. propoziţiei III.5, (iii)).

Pe de altă parte, $\|y\| = 1$, $\|y_n\| \leq 1$, deci $\left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \to 1$. Deducem din uniform convexitate că $\|y_n - y\| \to 0$ şi deci $x_n \to x$ în topologia tare.

III.8 Comentarii asupra capitolului III

1) Topologiile $\sigma(E, E')$, $\sigma(E', E'')$ şi $\sigma(E', E)$ sunt topologii local convexe separate. In consecinţă, ele se bucură de proprietăţile generale ale spaţiilor local convexe. Printre altele, teoremele lui Hahn-Banach (formele geometrice), teorema lui Krein-Milman, etc... rămân valabile; vezi Bourbaki [1] şi [EX].

2) Alte rezultate privind topologiile slabe merită a fi menţionate. De exemplu,

$\star$ **Teorema III.31 (Banach–Dieudonné–Krein–Šmulian). – Fie E un spaţiu Banach şi fie $C \subset E'$ convexă. Presupunem că pentru orice întreg n mulţimea $C \cap (nB_{E'})$ este închisă pentru topologia $\sigma(E', E)$. Atunci C este închisă pentru topologia $\sigma(E', E)$.**

Cititorul interesat poate găsi demonstraţia în Bourbaki [1], Larsen [1], Holmes [1], Dunford–Schwartz [1], Schaefer [1] şi ca exerciţiu în [EX]. Referinţele citate conţin şi numeroase alte proprietăţi legate de teorema Eberlein-Šmulian.

3) Teoria **spaţiilor vectoriale în dualitate**, care generalizează dualitatea $\langle E, E' \rangle$, a cunoscut orele sale de glorie în perioada 1940-1950. Spunem că două spaţii vectoriale X şi Y sunt în dualitate dacă există o formă biliniară $\langle\, , \rangle$ pe $X \times Y$ care separă punctele (adică $\forall x \neq 0\ \exists y$ astfel încât $\langle x, y \rangle \neq 0$ şi $\forall y \neq 0\ \exists x$ astfel încât $\langle x, y \rangle \neq 0$). Se pot defini pe X (resp. pe Y) mai multe topologii local convexe. Printre cele mai întâlnite vom reţine, în afara topologiei slabe $\sigma(X, Y)$, topologia lui Mackey $\tau(X, Y)$, topologia tare $\beta(X, Y)$, etc. Aceste topologii joacă un rol interesant atunci când se lucrează cu spaţii care **nu** sunt normate, de exemplu spaţiile care intervin în teoria distribuţiilor. Legat de spaţiile vectoriale în dualitate se pot consulta lucrările Bourbaki [1], Schaefer [1], Köthe [1], Treves [1], Kelley-Namioka [1], Edwards [1].

4) Proprietăţile de separabilitate, de reflexivitate şi de uniform convexitate sunt strâns legate şi de proprietăţile de **diferenţiabilitate** ale funcţiei $x \mapsto \|x\|$ (vezi Diestel [1], Beauzamy [1] şi [EX]). Existenţa unei norme echivalente care posedă bune proprietăţi geometrice este

un subiect foarte studiat; de pildă, cum se caracterizează spaţiile Banach care au o normă echivalentă uniform convexă? ([8]). **Geometria spaţiilor Banach** a cunoscut o dezvoltare spectaculoasă în ultimele decenii, graţie lucrărilor lui James, Dvoretsky, Grothendieck, Lindenstrauss, Pelczynski, Enflo, Johnson, Rosenthal, L. Schwartz şi elevii lor (Pisier, Maurey, Beauzamy ...), etc. In acest sens se pot consulta lucrările lui Beauzamy [1], Diestel [1],[2], Lindenstrauss-Tzafriri [2] şi L. Schwartz [4].

[8] Aceste spaţii se numesc super-reflexive, vezi Diestel [1] şi Beauzamy [1]

Capitolul IV

SPAŢIILE L^p

In cele ce urmează, Ω va fi un deschis din $\mathbf{R}^N$ înzestrat cu măsura Lebesgue dx. Presupunem că cititorul este familiarizat cu noţiunile de **funcţie integrabilă**, **funcţie măsurabilă** şi **mulţime neglijabilă**; vezi de exemplu Marle [1], Malliavin [1], Neveu [1], Rudin [2], Guichardet [1], Dieudonné [2], Kolmogorov-Fomin [1], Chae [1], Hewitt-Stromberg [1], Wheeden-Zygmund [1] etc. Notăm cu $L^1(\Omega)$ spaţiul funcţiilor integrabile pe Ω cu valori în $\mathbf{R}$. Fie

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|\, dx.$$

Când nu va exista ambiguitate vom scrie L^1 în loc de $L^1(\Omega)$ şi $\displaystyle\int f$ în loc de $\displaystyle\int_\Omega f(x)\, dx$. De obicei identificăm două funcţii din L^1 care coincid a.p.t. = aproape peste tot (= cu excepţia unei mulţimi neglijabile).

Reamintim acum următoarele rezultate.

IV.1 Câteva rezultate de integrare care trebuie neapărat cunoscute

• **Teorema IV.1 (Teorema de convergenţă monotonă a lui Beppo Levi). – Fie (f_n) un şir crescător de funcţii din L^1 astfel încât** $\mathrm{Sup}_n \displaystyle\int f_n < \infty$**.**

Atunci $f_n(x)$ converge a.p.t. pe Ω către o limită finită notată $f(x)$; în plus, $f \in L^1$ şi $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

• **Teorema IV.2 (Teorema convergenţei dominate a lui Lebesgue). – Fie** (f_n) **un şir de funcţii din** L^1**. Presupunem că**

a) $f_n(x) \to f(x)$ **a.p.t. în** Ω**,**

b) **există o funcţie** $g \in L^1$ **astfel încât pentru orice** n**,** $|f_n(x)| \leq g(x)$ **a.p.t. în** Ω **([1]).**

Atunci $f \in L^1$ **şi** $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Lema IV.1. (Lema lui Fatou). – Fie (f_n) **un şir de funcţii din** L^1 **astfel încât**

(1) **pentru orice** n**,** $f_n \geq 0 \;\; a.p.t.$

(2) $\mathrm{Sup}_n \int f_n < \infty$**.**

Pentru fiecare $x \in \Omega$ **punem** $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$**.**

Atunci $f \in L^1$ **şi**

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Notaţie. – Notăm cu $C_c(\mathbf{R}^N)$ spaţiul **funcţiilor continue pe** Ω **cu suport compact**, adică

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \backslash K, \text{ unde } K \subset \Omega \text{ este compactă}\}.$$

Teorema IV.3 (Teorema de densitate). – Spaţiul $C_c(\Omega)$ **este dens în** $L^1(\Omega)$**; adică**

$$\forall f \in L^1(\Omega) \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists f_1 \in C_c(\Omega) \text{ astfel încât } \|f - f_1\|_{L^1} \leq \varepsilon.$$

Fie $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^{N_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^{N_2}$, mulţimi deschise şi fie $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbf{R}$ o funcţie măsurabilă.

Teorema IV.4 (Tonelli). – Presupunem că

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)|\, dy < \infty \;\; \textbf{pentru a.p.t. } x \in \Omega_1$$

şi că

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|\, dy < \infty.$$

[1] Spunem că g este un **majorant integrabil** al funcţiilor (f_n).

Atunci $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Teorema IV.5 (Fubini). – Presupunem că $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$**.**

Atunci, pentru a.p.t. $x \in \Omega_1$**,** $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$ **şi** $\int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$**.**

Analog, pentru a.p.t. $y \in \Omega_2$**,** $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$ **şi** $\int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2)$.

In plus, avem

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)\,dx\,dy.$$

IV.2 Definiţia şi proprietăţile elementare ale spaţiilor L^p

Definiţie. – Fie $p \in \mathbf{R}$ cu $1 \le p < \infty$; definim

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbf{R}; f \text{ este măsurabilă şi } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Notăm

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p\,dx \right]^{1/p}.$$

Vom verifica ulterior că $\|\ \|_{L^p}$ este o normă.

Definiţie. – Notăm

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) = \ & \{f : \Omega \to \mathbf{R}; f \text{ este măsurabilă şi } \exists C \text{ astfel încât} \\ & |f(x)| \le C \text{ a.p.t. în } \Omega\}. \end{aligned}$$

Fie

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \operatorname{Inf}\{C;\ |f(x)| \le C \text{ a.p.t. în } \Omega\}.$$

Vom verifica ulterior că $\|\ \|_\infty$ este o normă.

Remarca 1. – Dacă $f \in L^\infty$ atunci

$$|f(x)| \le \|f\|_\infty \text{ a.p.t. în } \Omega.$$

Intr-adevăr, există un şir C_n astfel încât $C_n \to \|f\|_\infty$ şi pentru orice n, $|f(x)| \le C_n$ a.p.t. în Ω. Deci $|f(x)| \le C_n$ pentru orice $x \in \Omega \setminus E_n$, cu $|E_n| = 0$. Fie $E = \bigcup_1^\infty E_n$, deci $|E| = 0$ şi $|f(x)| \le \|f\|_\infty$, pentru orice $x \in \Omega \setminus E$.

Notaţie. – Fie $1 \le p \le \infty$; notăm cu p' **exponentul conjugat** al lui p, adică

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

• **Teorema IV.6 (Inegalitatea lui Hölder). – Fie $f \in L^p$ şi $g \in L^{p'}$ cu $1 \le p \le \infty$. Atunci $fg \in L^1$ şi**

$$\boxed{\int |fg| \le \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^{p'}}.} \tag{3}$$

Demonstraţie. – Concluzia este evidentă dacă $p = 1$ sau $p = \infty$. Fie $1 < p < \infty$. Reamintim **inegalitatea lui Young** ([2])

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \quad \forall a \ge 0, \quad \forall b \ge 0; \tag{4}$$

demonstraţia inegalităţii (4) este evidentă: funcţia "log" fiind concavă pe $(0, \infty)$, avem

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \ge \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'} = \log(ab).$$

Deci

$$|f(x)g(x)| \le \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'} \text{ a.p.t. } x \in \Omega.$$

Rezultă că $fg \in L^1$ şi

$$\int |fg| \le \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{p'}\|g\|_{L^{p'}}^{p'}. \tag{5}$$

Inlocuind f cu λf ($\lambda > 0$) în (5) avem

$$\int |fg| \le \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda p'}\|g\|_{L^{p'}}^{p'}. \tag{6}$$

[2] Vom utiliza uneori această inegalitate sub forma $ab \le \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^{p'}$ cu $C_\varepsilon = \varepsilon^{-1/(p-1)}$.

Alegem $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1}\|g\|_{L^{p'}}^{p'/p}$ (care minimizează membrul drept din (6)). Obţinem astfel (3).

Remarca 2. – Reţinem următoarea consecinţă foarte utilă a inegalităţii lui Hölder: fie $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funcţii astfel încât

$$f_i \in L^{p_i},\ 1 \leq i \leq k \text{ cu } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} \leq 1,$$

atunci $f = f_1 f_2 \ldots f_k$ aparţine lui L^p şi

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

In particular, dacă $f \in L^p \cap L^q$ cu $1 \leq p \leq q \leq \infty$, atunci $f \in L^r$ pentru orice r cu $p \leq r \leq q$ şi are loc următoarea **inegalitate de interpolare**

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha}\|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \text{ unde } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad (0 \leq \alpha \leq 1)\,;$$

(vezi [EX]).

Teorema IV.7. – L^p este un spaţiu vectorial şi $\|\ \ \|_{L^p}$ este o normă, pentru orice $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstraţie. – Cazurile $p = 1$ şi $p = \infty$ sunt evidente (se utilizează remarca 1). Presupunem că $1 < p < \infty$ şi fie $f, g \in L^p$. Avem

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

In consecinţă, $f + g \in L^p$. Pe de altă parte,

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int |f + g|^{p-1}|f + g| \leq \int |f + g|^{p-1}|f| + \int |f + g|^{p-1}|g|.$$

Dar $|f + g|^{p-1} \in L^{p'}$ şi, conform inegalităţii lui Hölder,

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq \|f + g\|_{L^p}^{p-1}(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}),$$

adică

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

• **Teorema IV.8 (Fischer-Riesz). – L^p este un spaţiu Banach pentru orice $1 \leq p \leq \infty$.**

Demonstraţie.
1) Presupunem mai întâi că $p = \infty$. Fie (f_n) un şir Cauchy în L^∞. Fiind dat un întreg $k \geq 1$, există un întreg N_k astfel încât $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ pentru $m, n \geq N_k$. Deci există E_k neglijabilă astfel încât

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k, \quad \forall m, n \geq N_k. \tag{7}$$

Fie $E = \bigcup_k E_k$ (E este neglijabilă). Atunci pentru orice $x \in \Omega \setminus E$, şirul $f_n(x)$ este Cauchy în $\mathbf{R}$. Fie $f_n(x) \to f(x)$ pentru $x \in \Omega \setminus E$. Trecând la limită în (7) când $m \to \infty$ obţinem

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \text{pentru orice } x \in \Omega \setminus E, \quad \forall n \geq N_k.$$

Deci $f \in L^\infty$ şi $\|f - f_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{k} \quad \forall n \geq N_k$. Prin urmare, $f_n \to f$ in L^∞.

2) Presupunem acum că $1 \leq p < \infty$. Fie (f_n) un şir Cauchy în L^p. Este suficient că arătăm că (f_n) conţine un subşir convergent în L^p.

Extragem un subşir (f_{n_k}) astfel încât

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

[se procedează astfel: există n_1 astfel încât $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \dfrac{1}{2}$ $\forall m, n \geq n_1$; alegem apoi $n_2 \geq n_1$ astfel încât $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \dfrac{1}{2^2}$, $\forall m, n \geq n_2$ etc...]. Vom demonstra că f_{n_k} converge în L^p. Pentru a simplifica notaţiile vom scrie f_k în loc de f_{n_k}. Deci

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1. \tag{8}$$

Punând

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|,$$

avem

$$\|g_n\|_{L^p} \leq 1.$$

Deducem din teorema convergenţei monotone că $g_n(x)$ tinde la o limită finită $g(x)$, a.p.t. în Ω, cu $g \in L^p$. Pe de altă parte, pentru orice $m \geq n \geq 2$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \ldots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

Rezultă că, a.p.t. în Ω, $f_n(x)$ este un şir Cauchy şi converge la o limită finită $f(x)$. Avem, a.p.t. în Ω,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{pentru } n \geq 2 \tag{9}$$

şi, în particular, $f \in L^p$. In final obţinem $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$, deoarece $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ a.p.t. şi $|f_n - f|^p \leq g^p \in L^1$. Concluzionăm folosind teorema convergenţei dominate a lui Lebesgue.

Teorema IV.9. – Fie (f_n) **un şir în** L^p **şi fie** $f \in L^p$ **astfel încât** $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$.

Atunci există un subşir (f_{n_k}) **şi o funcţie** $h \in L^p$ **astfel încât**

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ **a.p.t. în** Ω**,**

b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$**, a.p.t. în** Ω**.**

Demonstraţie. – Concluzia este evidentă dacă $p = \infty$. Presupunem deci că $1 \leq p < \infty$. Deoarece (f_n) este un şir Cauchy putem relua demonstraţia teoremei IV.8 pentru a extrage un subşir (f_{n_k}) care verifică (8). Continuând ca în demonstraţia teoremei IV.8, deducem că $f_{n_k}(x)$ converge a.p.t. către o limită notată cu $f^\star(x)$ ([3]). In plus, conform (9),

$$|f^\star(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad \forall k, \text{ a.p.t. în } \Omega \text{ cu } g \in L^p.$$

Rezultă că $f^\star \in L^p$ şi că $f_k \to f^\star$ în L^p (conform teoremei lui Lebesgue). In consecinţă, $f = f^\star$ a.p.t. şi deducem *a*). Pentru a deduce *b*), e suficient să alegem $h = f^\star + g$.

IV.3 Reflexivitate. Separabilitate. Dualul lui L^p

Vom distinge studiul următoarelor trei cazuri:

(*A*) $\quad 1 < p < \infty$

(*B*) $\quad p = 1$

(*C*) $\quad p = \infty$

[3] A priori trebuie să distingem f şi $f^\star$: ştim că $f_n \to f$ în L^p şi că $f_{n_k}(x) \to f^\star(x)$ a.p.t. în Ω.

A. Studiul lui L^p pentru $1 < p < \infty$.

Acest caz este cel mai “favorabil”: L^p este reflexiv, separabil şi dualul lui L^p este $L^{p'}$.

• **Teorema IV.10.** – **L^p is reflexiv pentru orice $1 < p < \infty$.**

Demonstraţia se compune din trei etape:

Prima etapă (Prima inegalitate a lui Clarkson). – Fie $2 \le p < \infty$. Avem

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \le \frac{1}{2}(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \quad \forall f, g \in L^p. \tag{10}$$

Demonstraţie. – Bineînţeles, este suficient să arătăm că

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \le \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p) \quad \forall a, b \in \mathbf{R}.$$

Avem

$$\alpha^p + \beta^p \le (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2} \quad \forall \alpha, \beta \ge 0$$

(prin omogenitate, reducem studiul la $\beta = 1$ şi observăm că funcţia $(x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ este crescătoare pe $[0, \infty)$). Alegând $\alpha = \left| \frac{a+b}{2} \right|$ şi $\beta = \left| \frac{a-b}{2} \right|$ obţinem

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \le \left(\left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \right)^{p/2} =$$

$$= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right)^{p/2} \le \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p).$$

[ultima inegalitate rezultă din convexitatea funcţiei $x \mapsto |x|^{p/2}$ pentru $p \ge 2$].

Etapa a doua: L^p este uniform convex, şi deci reflexiv pentru $2 \le p < \infty$.

Intr-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ şi $f, g \in L^p$ cu $\|f\|_{L^p} \le 1$, $\|g\|_{L^p} \le 1$ şi $\|f-g\|_{L^p} > \varepsilon$. Din (10) deducem că

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p < 1 - \delta,$$

cu
$$\delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{1/p} > 0.$$
In consecinţă, L^p este uniform convex şi deci reflexiv, conform teoremei III.29.

Etapa a treia: L^p este reflexiv pentru $1 < p \leq 2$.

Demonstraţie. – Fie $1 < p \leq 2$. Considerăm operatorul $T : L^p \to (L^{p'})'$ definit după cum urmează:

Fie $u \in L^p$ fixat; aplicaţia $f \in L^{p'} \mapsto \displaystyle\int uf$ este o funcţională liniară şi continuă pe $L^{p'}$ şi deci defineşte un element Tu în $(L^{p'})'$ astfel încât
$$\langle Tu, f\rangle = \int u\, f \quad \forall f \in L^{p'}.$$
Conform inegalităţii lui Hölder avem
$$|\langle Tu, f\rangle| \leq \|u\|_{L^p}\ \|f\|_{L^{p'}} \quad \forall f \in L^{p'}$$
şi deci
$$\|Tu\|_{(L^{p'})'} \leq \|u\|_{L^p}. \tag{11}$$
Pe de altă parte, fie
$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2}u(x) \quad (f_0(x) = 0 \text{ dacă } u(x) = 0).$$
Avem $f_0 \in L^{p'}$, $\|f_0\|_{L^{p'}} = \|u\|_{L^p}^{p-1}$ şi $\langle Tu, f_0\rangle = \|u\|_{L^p}^p$. Deci
$$\|Tu\|_{(L^{p'})'} \geq \frac{\langle Tu, f_0\rangle}{\|f_0\|} = \|u\|_{L^p}. \tag{12}$$
Comparând (11) şi (12) obţinem $\|Tu\|_{(L^{p'})'} = \|u\|_{L^p}$. Rezultă că T este o izometrie de la L^p într-un subspaţiu închis (deoarece L^p este complet) al lui $(L^{p'})'$. Dar $L^{p'}$ este reflexiv (etapa a doua) şi deci (corolarul III.18), spaţiul $(L^{p'})'$ este reflexiv. Conform propoziţiei III.17, rezultă că $T(L^p)$ este reflexiv şi aceeaşi proprietate o are şi L^p.

Remarca 3. – Arătăm că L^p este **uniform convex** dacă $1 < p \leq 2$. Utilizăm în acest scop a doua inegalitate a lui Clarkson, valabilă pentru $1 < p \leq 2$:
$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}\,\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\,\|g\|_{L^p}^p\right)^{1/(p-1)}.$$

Această inegalitate este mult mai dificil de stabilit decât prima inegalitate a lui Clarkson; vezi de exemplu [EX] sau Hewitt-Stromberg [1]. Pentru o abordare diferită, vezi Diestel [1], Morawetz [1] şi [EX].

• **Teorema IV.11 (Teorema de reprezentare a lui Riesz).** – **Fie** $1 < p < \infty$ **şi** $\phi \in (L^p)'$**. Atunci există şi este unic** $u \in L^{p'}$ **astfel încât**

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf \quad \forall f \in L^p.$$

In plus,

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\phi\|_{(L^p)'} .$$

• Remarca 4. – Teorema IV.11 este foarte importantă. Ea exprimă faptul că orice funcţională liniară şi continuă pe L^p cu $1 < p < \infty$ poate fi reprezentată cu ajutorul unei funcţii din $L^{p'}$. Aplicaţia $\phi \mapsto u$ este un operator liniar, izometric şi surjectiv, care permite să se identifice dualul lui L^p cu $L^{p'}$. **In cele ce urmează vom face în mod sistematic identificarea**

$$\boxed{(L^p)' = L^{p'}.}$$

Demonstraţie. – Definim operatorul $T : L^{p'} \to (L^p)'$ prin

$$\langle Tu, f \rangle = \int uf \quad \forall u \in L^{p'},\ \forall f \in L^p.$$

Avem

$$\|Tu\|_{(L^p)'} = \|u\|_{L^{p'}} \quad \forall u \in L^{p'}$$

(se procedează ca în demonstraţia teoremei IV.10, etapa a treia). Trebuie să demonstrăm că T este surjectiv. Intr-adevăr, fie $E = T(L^{p'})$. Deoarece E este un subspaţiu închis, este suficient să arătăm că E este dens în $(L^p)'$. Fie $h \in (L^p)''$ [$=L^p$, deoarece L^p este reflexiv] astfel încât $\langle h, Tu \rangle = 0 \quad \forall u \in L^{p'}$; verificăm că $h = 0$. Avem

$$\int uh = \langle Tu, h \rangle = 0 \quad \forall u \in L^{p'}.$$

Alegând $u = |h|^{p-2}h$ deducem că $h = 0$.

Teorema IV.12 (Densitate). – **Spaţiul** $C_c(\Omega)$ **este dens în** $L^p(\Omega)$ **pentru orice** $1 \le p < \infty$.

Incepem cu o definiţie şi o lemă.

Definiţie. – Fie $1 \le p \le \infty$; spunem că o funcţie $f : \Omega \to \mathbf{R}$ aparţine lui $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ dacă $f\mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ pentru orice compact $K \subset \Omega$.

Lema IV.2. – Fie $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ astfel încât

$$\int fu = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega). \tag{13}$$

Atunci $f = 0$ a.p.t. în Ω.

Demonstraţia lemei IV.2. – Procedăm în două etape:

1) Presupunem că avem, în plus, $f \in L^1(\Omega)$ şi $|\Omega| < \infty$ ([4]).

Fiind dat $\varepsilon > 0$, există $f_1 \in C_c(\Omega)$ astfel încât $\|f - f_1\|_{L^1} < \varepsilon$. Din (13) obţinem

$$\left|\int f_1 u\right| \le \varepsilon \|u\|_{L^\infty} \quad \forall u \in C_c(\Omega). \tag{14}$$

Fie

$$K_1 = \{x \in \Omega;\ f_1(x) \ge \varepsilon\}$$
$$K_2 = \{x \in \Omega;\ f_1(x) \le -\varepsilon\}.$$

Deoarece K_1 şi K_2 sunt mulţimi compacte şi disjuncte, se poate construi cu teorema lui Tietze-Urysohn (vezi Dieudonné [1], L. Schwartz [2] sau Yosida [1]) o funcţie $u_0 \in C_c(\Omega)$ astfel încât $u_0(x) = +1$ dacă $x \in K_1$, $u_0(x) = -1$ dacă $x \in K_2$ şi $|u_0(x)| \le 1$ pentru orice $x \in \Omega$. Fie $K = K_1 \cup K_2$. Atunci

$$\int_\Omega f_1 u_0 = \int_{\Omega\setminus K} f_1 u_0 + \int_K f_1 u_0$$

şi deci, conform (14),

$$\int_K |f_1| = \int_K f_1 u_0 \le \varepsilon + \int_{\Omega\setminus K} |f_1 u_0| \le \varepsilon + \int_{\Omega\setminus K} |f_1|.$$

In consecinţă,

$$\int_\Omega |f_1| = \int_K |f_1| + \int_{\Omega\setminus K} |f_1| \le \varepsilon + 2\int_{\Omega\setminus K} |f_1| \le \varepsilon + 2\varepsilon|\Omega|,$$

[4]Fiind dată $A \subset \Omega$ măsurabilă, notăm cu $|A|$ **măsura** lui A; $|A|$ poate fi, eventual, infinită.

deoarece

$$|f_1| \le \varepsilon \quad \text{pe } \Omega \setminus K.$$

Deci

$$\|f\|_{L^1} \le \|f - f_1\|_{L^1} + \|f_1\|_{L^1} \le 2\varepsilon + 2\varepsilon|\Omega|.$$

Această inegalitate fiind verificată pentru orice $\varepsilon > 0$ rezultă că $f = 0$ a.p.t. în Ω.

2) Considerăm acum cazul general. Scriem $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ cu Ω_n deschise şi mărginite, $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$. [Se poate lua de exemplu $\Omega_n = \{x \in \Omega;\ \mathrm{dist}\,(x, \Omega^c) > 1/n$ şi $|x| < n\}$]. Aplicând situaţia precedentă pentru Ω_n şi $f_{|\Omega_n}$ deducem că $f = 0$ a.p.t. în Ω_n şi obţinem apoi $f = 0$ a.p.t. în Ω.

Demonstraţia teoremei IV.12. – Ştim deja că $C_c(\Omega)$ este dens în $L^1(\Omega)$. Presupunem acum că $1 < p < \infty$. Pentru a demonstra că $C_c(\Omega)$ este dens în $L^p(\Omega)$ este suficient să verificăm că dacă $h \in L^{p'}(\Omega)$ satisface $\int hu = 0$ pentru orice $u \in C_c(\Omega)$, atunci $h = 0$. Dar $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pentru că $\int |h\mathbf{1}_K| \le \|h\|_{L^{p'}} |K|^{1/p} < \infty$ şi deci putem aplica lema IV.2 pentru a deduce că $h = 0$ a.p.t.

Teorema IV.13. – **$L^p(\Omega)$ este separabil pentru** $1 \le p < \infty$.

Demonstraţie. – Fie $(R_i)_{i \in I}$ o familie numărabilă de mulţimi R de forma $R = \prod_{k=1}^N (a_k, b_k)$ cu $a_k, b_k \in \mathbf{Q}$ şi $R \subset \mathbf{Q}$.

Fie E spaţiul vectorial peste $\mathbf{Q}$ generat de funcţiile $\mathbf{1}_{R_i}$, adică combinaţiile liniare finite cu coeficienţi raţionali de funcţii $\mathbf{1}_{R_i}$. Rezultă că E este numărabilă. Să arătăm că E este densă în $L^p(\Omega)$. Intr-adevăr, fiind daţi $f \in L^p(\Omega)$ şi $\varepsilon > 0$, există $f_1 \in C_c(\Omega)$ astfel încât $\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon$ (teorema IV.12). Fie Ω' un deschis **mărginit** astfel încât $\mathrm{Supp}\, f_1 \subset \Omega' \subset \Omega$. Intrucât $f_1 \in C_c(\Omega')$, există $f_2 \in E$ astfel încât $\mathrm{Supp}\, f_2 \subset \Omega'$ şi $|f_1(x) - f_2(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$ a.p.t. în Ω' (se începe prin a acoperi $\mathrm{Supp}\, f_1$ cu un număr finit de mulţimi pavate R_i pe care oscilaţia lui f_1 este inferioară lui $\dfrac{\varepsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$). Rezultă că $\|f_2 - f_1\|_{L^p} \le \varepsilon$ şi deci $\|f - f_2\| < 2\varepsilon$.

Remarca 5. – Pentru a demonstra teorema IV.13 am fi putut face apel şi la faptul că dacă K este un spaţiu metric compact atunci $C(K)$ este separabil (vezi de exemplu Dieudonné [1] (7.4.4)).

B. Studiul lui L^1.

• **Teorema IV.14. – Fie $\phi \in (L^1)'$. Atunci există în mod unic $u \in L^\infty$ astfel încât**

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf \quad \forall f \in L^1.$$

In plus

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{(L^1)'}.$$

• Remarca 6. – Teorema IV.14 afirmă că orice funcţională liniară şi continuă pe L^1 poate fi reprezentată cu ajutorul unei funcţii din L^∞. Aplicaţia $\phi \mapsto u$ este o izometrie surjectivă care permite să identificăm $(L^1)'$ şi L^∞. **In continuare vom face în mod sistematic identificarea**:

$$\boxed{(L^1)' = L^\infty.}$$

Demonstraţie. – Incepem prin a demonstra existenţa lui u. Fixăm o funcţie $\theta \in L^2(\Omega)$ astfel încât pentru orice compact $K \subset \Omega$, $\theta(x) \geq \varepsilon_K > 0$ a.p.t. pe K. [Este evident că o asemenea funcţie există: luăm $\theta(x) = \alpha_n$ pentru $x \in \Omega$, $n \leq |x| < n+1$ şi ajustăm constantele α_n astfel încât $\theta \in L^2(\Omega)$.] Aplicaţia $f \in L^2(\Omega) \mapsto \langle \phi, \theta f \rangle$ este o funcţională liniară şi continuă pe $L^2(\Omega)$. Conform teoremei IV.11 (aplicată cu $p = 2$) există o funcţie $v \in L^2(\Omega)$ astfel încât

$$\langle \phi, \theta f \rangle = \int vf \quad \forall f \in L^2(\Omega). \tag{15}$$

Fie $u(x) = v(x)/\theta(x)$. Evident, u este bine definită deoarece $\theta > 0$ pe Ω şi u este măsurabilă. Arătăm că $u \in L^\infty$ şi că $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\phi\|_{(L^1)'}$. Conform (15) avem

$$\left| \int vf \right| \leq \|\phi\|_{(L^1)'} \|\theta f\|_{L^1} \quad \forall f \in L^2. \tag{16}$$

Fixăm $C > \|\phi\|_{(L^1)'}$. Arătăm că mulţimea

$$A = \{x \in \Omega; |u(x)| > C\}$$

este neglijabilă (va rezulta că $u \in L^\infty$ şi că $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\phi\|_{(L^1)'}$). Raţionăm prin reducere la absurd. Dacă A nu este neglijabilă, există $\tilde{A} \subset A$ măsurabilă astfel încât

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{dacă } x \in \tilde{A},\ u(x) > 0 \\ -1 & \text{dacă } x \in \tilde{A},\ u(x) < 0 \\ 0 & \text{dacă } x \in \omega \setminus \tilde{A}. \end{cases}$$

Rezultă că $\displaystyle\int_{\tilde{A}} |u|\theta \leq \|\phi\|_{(L^1)'} \int_{\tilde{A}} \theta$, ceea ce este absurd deoarece $\displaystyle\int_{\tilde{A}} \theta > 0$.

Recapitulăm: am construit $u \in L^\infty(\Omega)$ astfel încât $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\phi\|_{(L^1)'}$ şi

$$\langle \phi, \theta f \rangle = \int u\theta f \quad \forall f \in L^2. \tag{17}$$

Rezultă că

$$\langle \phi, g \rangle = \int ug \quad \forall g \in C_c(\Omega). \tag{18}$$

Intr-adevăr, dacă $g \in C_c(\Omega)$, atunci $f = \dfrac{g}{\theta} \in L^2$ (pentru că $\theta \geq \varepsilon > 0$ pe $\operatorname{Supp} g$) şi putem înlocui f în (17). Deoarece $C_c(\Omega)$ este dens în L^1 deducem din (18) că

$$\langle \phi, g \rangle = \int ug \quad \forall g \in L^1.$$

In sfârşit, avem

$$|\langle \phi, g \rangle| \leq \int |ug| \leq \|u\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} \quad \forall g \in L^1$$

şi deci $\|\phi\|_{(L^1)'} \leq \|u\|_{L^\infty}$. In consecinţă, $\|\phi\|_{(L^1)'} = \|u\|_{L^\infty}$. Unicitatea lui u este o consecinţă imediată a lemei IV.2.

• Remarca 7. – Spaţiul $L^1(\Omega)$ **nu este reflexiv**. Intr-adevăr, să presupunem (pentru a fixa ideile) că $0 \in \Omega$. Să considerăm şirul $f_n = \alpha_n \mathbf{1}_{B\left(0, \frac{1}{n}\right)}$ cu n suficient de mare astfel încât $B\left(0, \dfrac{1}{n}\right) \subset \Omega$ şi $\alpha_n = \left| B\left(0, \dfrac{1}{n}\right) \right|^{-1}$, ceea ce implică $\|f_n\|_{L^1} = 1$. Dacă L^1 ar fi reflexiv ar exista un subşir (f_{n_k}) şi $f \in L^1$ astfel încât $f_{n_k} \rightharpoonup f$ pentru topologia slabă $\sigma(L^1, L^\infty)$. Deci

$$\int f_{n_k}\phi \to \int f\phi \quad \forall \phi \in L^\infty. \tag{19}$$

Dacă $\phi \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$ atunci $\displaystyle\int f_{n_k}\phi = 0$ pentru k suficient de mare. Din (19) rezultă că

$$\int f\phi = 0 \quad \forall \phi \in C_c(\Omega \setminus \{0\}).$$

Aplicând lema IV.2 în deschisul $\Omega \setminus \{0\}$ funcţiei f (restrânsă la $\Omega \setminus \{0\}$) obţinem că $f = 0$ a.p.t. pe $\Omega \setminus \{0\}$. Deci $f = 0$ a.p.t. în Ω. Dacă luăm $\phi \equiv 1$ în (19), rezultă că $\displaystyle\int f = 1$, ceea ce este absurd.

C. Studiul lui L^∞.

Am văzut (teorema IV.14) că $L^\infty = (L^1)'$. De aceea, spaţiul L^∞ se bucură de câteva proprietăţi remarcabile. Printre altele, avem

• (i) Bila unitate închisă B_{L^∞} este compactă pentru topologia $\star$ slabă $\sigma(L^\infty, L^1)$ (cf. teoremei III.15).

• (ii) Dacă (f_n) este un şir mărginit în $L^\infty(\Omega)$, se poate extrage un subşir (f_{n_k}) şi $f \in L^\infty(\Omega)$ astfel încât $f_{n_k} \rightharpoonup f$ pentru topologia $\star$ $\sigma(L^\infty, L^1)$ (teoremele III.25 şi IV.13).

Cu toate acestea, $L^\infty(\Omega)$ **nu** este reflexiv (în caz contrar, L^1 ar fi reflexiv, conform corolarului III.18 şi ştim deja că L^1 nu este reflexiv).

Dualul lui L^∞ conţine L^1 (deoarece $L^\infty = (L^1)'$), dar $(L^\infty)'$ este **strict mai mare** decât L^1. Cu alte cuvinte, există funcţionale liniare şi continue ϕ pe L^∞ care nu sunt de tipul

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf \quad \forall f \in L^\infty \text{ şi pentru un anumit } u \in L^1.$$

Să construim un exemplu "concret" de asemenea funcţională. Presupunem că $0 \in \Omega$ şi fie $\phi_0 : C_c(\Omega) \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\phi_0(f) = f(0) \text{ pentru } f \in C_c(\Omega).$$

Evident, ϕ_0 este o funcţională liniară şi continuă pe $C_c(\Omega)$ pentru norma $\| \ \|_\infty$. Conform teoremei lui Hahn-Banach, putem prelungi ϕ_0 la o funcţională liniară şi continuă ϕ pe $L^\infty(\Omega)$. Avem

$$\langle \phi, f \rangle = f(0) \quad \forall f \in C_c(\Omega). \tag{20}$$

Arătăm că **nu există** $u \in L^1$ astfel încât

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf \quad \forall f \in L^\infty.$$

Presupunem prin reducere la absurd că o asemenea funcţie u există. Deci

$$\int uf = 0 \quad \forall f \in C_c(\Omega \setminus \{0\}).$$

Aplicând lema IV.2 (pe $\Omega \setminus \{0\}$)) obţinem că $u = 0$ a.p.t. în Ω. Deci

$$\langle \phi, f \rangle = 0 \quad \forall f \in L^\infty,$$

ceea ce contrazice (20).

$\star$ Remarca 8. – Dacă dualul lui L^∞ nu coincide cu L^1 putem totuşi să ne întrebăm cu ce "seamănă" $(L^\infty)'$? In acest sens considerăm $L^\infty(\Omega; \mathbf{C})$ ca o $C^\star$ algebră comutativă (vezi de exemplu Rudin [1]). Conform teoremei lui Gelfand, $L^\infty(\Omega; \mathbf{C})$ este izomorfă şi izometrică cu $C(K; \mathbf{C})$ (unde K este un spaţiu topologic compact, mai precis spectrul algebrei L^∞). Deci $(L^\infty(\Omega; \mathbf{C}))'$ se identifică cu spaţiul măsurilor (Radon) pe K (cu valori în $\mathbf{C}$) [şi $L^\infty(\Omega; \mathbf{R})'$ se identifică cu spaţiul măsurilor (Radon) pe K cu valori în $\mathbf{R}$]. Pentru mai multe detalii, vezi Rudin [1] şi Yosida [1] (p. 118).

Remarca 9. – Spaţiul L^∞ **nu este separabil**. Pentru a stabili acest lucru este comod să utilizăm

Lema IV.3. – Fie E un spaţiu Banach. Presupunem că există o familie $(O_i)_{i \in I}$ astfel încât

(i) **pentru orice $i \in I$, O_i este o submulţime deschisă şi nevidă lui E,**

(ii) $O_i \cap O_j = \emptyset$ **dacă** $i \neq j$ **,**

(iii) I **nu este numărabilă.**

Atunci E nu este separabil.

Demonstraţia lemei IV.3. – Raţionăm prin absurd şi presupunem că E este separabil. Fie $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un şir dens în E. Pentru orice $i \in I$, $O_i \cap (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \neq \emptyset$ şi alegem $n(i)$ astfel încât $u_{n(i)} \in O_i$. Aplicaţia $i \mapsto n(i)$ este injectivă; într-adevăr, dacă $n(i) = n(j)$, atunci $u_{n(i)} = u_{n(j)} \in O_i \cap O_j$ şi deci $i = j$. Deci I este numărabilă, ceea ce contrazice (iii).

Arătăm în cele ce urmează că L^∞ nu este separabil. Pentru orice $a \in \Omega$, fixăm $r_a < \operatorname{dist}(a, \Omega^c)$; fie $u_a = \mathbf{1}_{B(a,r_a)}$ şi

$$O_a = \{f \in L^\infty;\ \|f - u_a\|_\infty < 1/2\}\ .$$

Verificăm cu uşurinţă că familia $(O_a)_{a\in\Omega}$ satisface (i), (ii) şi (iii).

Tabloul următor sintetizează principalele proprietăţi ale spaţiilor L^p întâlnite în §IV.3.

	Reflexiv	Separabil	Spaţiul dual
L^p cu $1 < p < \infty$	DA	DA	$L^{p'}$
L^1	NU	DA	L^∞
L^∞	NU	NU	Conţine strict L^1

IV.4 Convoluţie şi regularizare

In acest paragraf, cu excepţia propoziţiei IV.17 şi a corolarului IV.23 vom lua $\Omega = \mathbf{R}^N$.

• **Teorema IV.15. – Fie** $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ **şi** $g \in L^p(\mathbf{R}^N)$ **cu** $1 \le p \le \infty$.
Atunci, pentru a.p.t. $x \in \mathbf{R}^N$ **funcţia** $y \mapsto f(x-y)g(y)$ **este integrabilă pe** $\mathbf{R}^N$**.**

Definim

$$\boxed{(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy.}$$

Atunci $f \star g \in L^p(\mathbf{R}^N)$ **şi**

$$\boxed{\|f \star g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1}\ \|g\|_{L^p}.}$$

Demonstraţie. – Concluzia este evidentă dacă $p = \infty$. Presupunem mai întâi că $p = 1$ şi definim

$$F(x,y) = f(x-y)g(y).$$

Pentru a.p.t. $y \in \mathbf{R}^N$ avem

$$\int_{\mathbf{R}^N} |F(x,y)|\,dx = |g(y)| \int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|\,dx = |g(y)|\ \|f\|_{L^1} < \infty$$

şi
$$\int_{\mathbf{R}^N} dy \int_{\mathbf{R}^N} |F(x,y)|\, dx = \|f\|_{L^1}\, \|g\|_{L^1} < \infty.$$
Aplicând teorema lui Tonelli (teorema IV.4) obţinem $F \in L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$. Conform teoremei lui Fubini (teorema IV.5) avem
$$\int_{\mathbf{R}^N} |F(x,y)|\, dy < \infty \text{ a.p.t. } x \in \mathbf{R}^N$$
şi
$$\int_{\mathbf{R}^N} dx \int_{\mathbf{R}^N} |F(x,y)|\, dy \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$
Acest rezultat corespunde exact concluziei teoremei IV.15.

Presupunem acum că $1 < p < \infty$. Conform cazului precedent, ştim că pentru a.p.t. $x \in \mathbf{R}^N$ **fixat**, funcţia $y \mapsto |f(x-y)|\; |g(y)|^p$ este integrabilă pe $\mathbf{R}^N$, adică
$$|f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^p_y(\mathbf{R}^N).$$
Deoarece $|f(x,y)|^{1/p'} \in L^{p'}_y(\mathbf{R}^N)$, deducem din inegalitatea lui Hölder că
$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1/p'}|f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^1_y(\mathbf{R}^N)$$
şi
$$\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)||g(y)|\, dy \leq \|f\|_1^{1/p'} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|\; |g(y)|^p\, dy\right)^{1/p},$$
adică
$$|(f \star g)(x)|^p \leq \|f\|_1^{p/p'}(|f| \star |g|^p)(x)$$
Aplicând rezultatul din cazul $p = 1$ obţinem $f \star g \in L^p(\mathbf{R}^N)$ şi
$$\|f \star g\|^p_{L^p} \leq \|f\|_1^{p/p'}\|f\|_{L^1}\|g\|_p^p,$$
adică
$$\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Notaţie. – Fiind dată o funcţie f, definim $\check{f}(x) = f(-x)$.

Propoziţia IV.16. – Fie $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$**,** $g \in L^p(\mathbf{R}^N)$ **şi** $h \in L^{p'}(\mathbf{R}^N)$. **Atunci**
$$\int_{\mathbf{R}^N} (f \star g)h = \int_{\mathbf{R}^N} g(\check{f} \star h).$$

Demonstraţie. – Funcţia $F(x, y) = f(x-y)g(y)h(x)$ aparţine lui $L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ deoarece

$$\int |h(x)| dx \int |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy < \infty$$

conform teoremei IV.15 şi inegalităţii lui Hölder. Deci

$$\begin{aligned} \int (f \star g)(x) h(x)\, dx &= \int dx \int F(x,y)\, dy = \int dy \int F(x,y)\, dx \\ &= \int g(y)(\check{f} \star h)(y)\, dy. \end{aligned}$$

Suport şi convoluţie.

Noţiunea de **suport al unei funcţii continue** f este bine cunoscută: este complementara celui mai mare deschis pe care f se anulează (sau, în mod echivalent, este aderenţa mulţimii $\{x; f(x) \neq 0\}$). Când lucrăm cu funcţii măsurabile trebuie să fim mai prudenţi – deoarece aceste funcţii sunt definite aproape peste tot – şi definiţia precedentă nu mai este convenabilă (ne putem convinge de acest lucru considerând $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$). Definiţia convenabilă este următoarea:

Propoziţia IV.17 şi definiţia suportului. – Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă şi $f : \Omega \to \mathbf{R}$. Considerăm familia tuturor mulţimilor deschise $(\omega_i)_{i \in I}$, $\omega_i \subset \mathbf{R}^N$ astfel încât pentru orice $i \in I$, $f = 0$ a.p.t. în ω_i. Fie $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$.

Atunci $f = 0$ a.p.t. în ω.

Prin definiţie, $\operatorname{Supp} f = \Omega \setminus \omega$.

Remarca 10.

a) Dacă $f_1 = f_2$ a.p.t. în Ω atunci $\operatorname{Supp} f_1 = \operatorname{Supp} f_2$. Deci **putem vorbi de suportul unei funcţii** $f \in L^p$ (fără a preciza care reprezentant se alege din clasa de echivalenţă.

b) Dacă f este continuă pe Ω se verifică fără dificultate că această definiţie coincide cu definiţia uzuală.

Demonstraţie. – Nu este clar că $f = 0$ a.p.t. în ω deoarece familia I nu este numărabilă. Totuşi putem reduce problema la cazul numărabil prin procedeul următor. Fie (K_n) un şir de mulţimi compacte astfel încât $\omega = \bigcup_n K_n$

$$\left[\text{se poate lua } K_n = \left\{x \in \omega;\ \operatorname{dist}(x, \mathbf{R}^N \setminus \omega) \geq \frac{1}{n} \text{ şi } |x| \leq n\right\}\right].$$

Apoi, pentru orice n, K_n poate fi acoperită cu un număr finit de mulţimi ω_i: $K_n \subset \bigcup_{i\in I_n} \omega_i$ cu $I_n \subset I$ finită. Punând $J = \bigcup_n I_n$ (J este numărabilă) avem $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$. Deoarece $f = 0$ a.p.t. în ω_i, rezultă că $f = 0$ a.p.t. în ω.

• **Propoziţia IV.18. – Fie $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ şi $g \in L^p(\mathbf{R}^N)$. Atunci**

$$\boxed{\operatorname{Supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{Supp} f + \operatorname{Supp} g}}$$

Demonstraţie. – Fie $x \in \mathbf{R}^N$ astfel încât funcţia $y \mapsto f(x-y)g(y)$ este integrabilă (vezi teorema IV.15). Avem

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy = \int_{(x-\operatorname{Supp} f)\cap \operatorname{Supp} g} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Dacă $x \notin \operatorname{Supp} f + \operatorname{Supp} g$, atunci $(x - \operatorname{Supp} f) \cap \operatorname{Supp} g = \emptyset$ şi $(f*g)(x) = 0$. Deci

$$(f * g)(x) = 0 \ \text{ a.p.t. pe } (\operatorname{Supp} f + \operatorname{Supp} g)^c.$$

In particular,

$$(f * g)(x) = 0 \ \text{ a.p.t. pe } \operatorname{Int}[(\operatorname{Supp} f + \operatorname{Supp} g)^c]$$

şi, în consecinţă,

$$\operatorname{Supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{Supp} f + \operatorname{Supp} g}.$$

• Remarca 11. – Dacă f **şi** g au suportul compact, atunci $f * g$ are, de asemenea, suportul compact. Totuşi $f * g$ nu are, în mod necesar, suportul compact dacă doar **una** dintre funcţiile f şi g are suportul compact.

Propoziţia IV.19. – Fie $f \in C_c(\mathbf{R}^N)$ şi $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$. Atunci

$$(f * g) \in C(\mathbf{R}^N).$$

Demonstraţie. – Observăm mai întâi că pentru **orice** $x \in \mathbf{R}^N$ funcţia $y \mapsto f(x-y)g(y)$ este integrabilă pe $\mathbf{R}^N$ şi deci $(f*g)(x)$ are sens pentru **orice** $x \in \mathbf{R}^N$.

Fie $x_n \to x$ şi

$$F_n(y) = f(x_n - y)g(y)$$

$$F(y) = f(x - y)g(y).$$

Rezultă că $F_n(y) \to F(y)$ a.p.t. în $\mathbf{R}^N$. Pe de altă parte, fie K un compact fixat astfel încât $(x_n - \operatorname{Supp} f) \subset K$, pentru orice n. Deci $f(x_n - y) = 0$ pentru $y \notin K$. Rezultă că $|F_n(y)| \le \|f\|_{L^\infty} \mathbf{1}_K(y)$, care este un majorant integrabil. Aplicând teorema lui Lebesgue obţinem

$$(f * g)(x_n) = \int F_n(y)\, dy \to \int F(y)\, dy = (f * g)(x).$$

Notaţii. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă. $C^k(\Omega)$ reprezintă spaţiul funcţiilor care sunt de k ori continuu diferenţiabile pe Ω.

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_k C^k(\Omega)$$

$$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

$$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

(unii autori folosesc notaţia $\mathcal{D}(\Omega)$ sau $C_0^\infty(\Omega)$ în loc de $C_c^\infty(\Omega)$).

• **Propoziţia IV.20. – Fie $f \in C_c^k(\mathbf{R}^N)$ şi $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$ (k număr întreg). Atunci**

$$f * g \in C^k(\mathbf{R}^N) \quad \textbf{şi} \quad D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g \ (^5).$$

In particular, dacă $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ şi $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$, atunci $f * g \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$.

Demonstraţie. – Prin inducţie reducem imediat problema la cazul $k = 1$.

[5] D^α reprezintă oricare dintre derivatele parţiale

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} f,$$

unde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N \le k$.

Fie $x \in \mathbf{R}^N$ fixat; arătăm că $f * g$ este diferenţiabilă în x şi că

$$\nabla(f * g)(x) = (\nabla f) * g(x) \ (^6).$$

Fie $h \in \mathbf{R}^N$ cu $|h| < 1$ (cu tendinţa de a lua $h \to 0$). Pentru orice $y \in \mathbf{R}^N$ avem

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - h \cdot \nabla f(x-y)| =$$

$$= \left| \int_0^1 [h \cdot \nabla f(x+sh-y) - h \cdot \nabla f(x-y)]\, ds \right| \leq |h|\varepsilon(|h|)$$

cu $\varepsilon(|h|) \to 0$ când $|h| \to 0$ (deoarece ∇f este uniform continuă pe $\mathbf{R}^N$).

Fie K un compact în $\mathbf{R}^N$ suficient de larg astfel încât $x + B(0,1) \setminus \operatorname{Supp} f \subset K$. Avem

$$f(x+h-y) - f(x-y) - h \cdot \nabla f(x-y) = 0 \quad \forall y \notin K, \quad \forall h \in B(0,1)$$

şi deci

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - h \cdot \nabla f(x-y)| \leq |h|\varepsilon(|h|)\mathbf{1}_K(y) \ \forall y \in \mathbf{R}^N,$$
$$\forall h \in B(0,1).$$

Deci

$$|(f*g)(x+h) - (f*g)(x) - h \cdot (\nabla f * g)(x)| \leq |h|\varepsilon(|h|) \int_K |g(y)|\, dy.$$

Rezultă că $f * g$ este diferenţiabilă în x şi $\nabla(f * g)(x) = (\nabla f) * g(x)$.

Şiruri regularizante

Definiţie. – Se numeşte şir regularizant (**mollifiers** în engleză) orice şir de funcţii $(\rho_n)_{n\geq 1}$ definite pe $\mathbf{R}^N$ astfel încât

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N), \quad \operatorname{Supp} \rho_n \subset \overline{B(0,1/n)}, \quad \int \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0 \text{ în } \mathbf{R}^N.$$

In cele ce urmează **vom utiliza în mod sistematic notaţia** (ρ_n) pentru a desemna un şir regularizant.

---

[6] $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_N} \right)$.

Remarcăm că **există** şiruri regularizante. Intr-adevăr, este suficient să fixăm o funcţie $\rho \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $\operatorname{Supp} \rho \subset B(0,1)$, $\rho \geq 0$ în $\mathbf{R}^N$ şi $\int \rho > 0$; se poate considera, de exemplu, funcţia

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{dacă } |x| < 1 \\ 0 & \text{dacă } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Definim apoi $\rho_n(x) = Cn^N \rho(nx)$ cu $C = \left(\int \rho\right)^{-1}$.

Propoziţia IV.21. – Fie $f \in C(\mathbf{R}^N)$. Atunci $\rho_n * f \to f$ uniform pe orice compact din $\mathbf{R}^N$.

Demonstraţie. – Fie $K \subset \mathbf{R}^N$ un compact fixat. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ (depinzând de K şi ε) astfel încât

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K, \quad \forall y \in B(0,\delta).$$

Avem

$$\begin{aligned}(\rho_n * f)(x) - f(x) &= \textstyle\int [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)\,dy \\ &= \textstyle\int_{B(0,1/n)} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)\,dy.\end{aligned}$$

Pentru $n > 1/\delta$ şi $x \in K$ obţinem

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon.$$

• **Teorema IV.22. – Fie $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ cu $1 \leq p < \infty$. Atunci $(\rho_n * f) \to f$ în $L^p(\mathbf{R}^N)$.**

Demonstraţie. – Fie $\varepsilon > 0$ şi $f_1 \in C_c(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon$ (vezi teorema IV.12). Conform propoziţiei IV.21 avem $\rho_n * f_1 \to f_1$ uniform pe orice compact din $\mathbf{R}^N$. Pe de altă parte (vezi propoziţia IV.18)

$$\operatorname{Supp}(\rho_n * f_1) \subset \overline{B(0,1/n)} + \operatorname{Supp} f_1 \subset \overline{B(0,1)} + \operatorname{Supp} f_1 \subset K,$$

unde K este un compact fixat. Deducem de aici că

$$\|(\rho_n * f_1) - f_1\|_{L^p} \longrightarrow 0 \qquad \text{dacă } n \to \infty.$$

In final, scriem

$$(\rho_n * f) - f = [\rho_n * (f - f_1)] + [(\rho_n * f_1) - f_1] + [f_1 - f]$$

şi deci

$$\|(\rho_n * f) - f\|_{L^p} \leq 2\|f - f_1\|_{L^p} + \|(\rho_n * f_1) - f_1\|_{L^p}$$

(conform teoremei IV.15).

Deducem că

$$\limsup_{n\to\infty} \|(\rho_n * f) - f\|_{L^p} \leq 2\varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} \|(\rho_n * f) - f\|_{L^p} = 0.$$

• **Corolarul IV.23. – Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă. Atunci $C_c^\infty(\Omega)$ este dens în $L^p(\Omega)$ pentru orice $1 \leq p < \infty$.**

Demonstraţie. ([7]) – Fie $f \in L^p(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ şi $f_1 \in C_c(\Omega)$ astfel încât

$$\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Definim funcţia

$$\bar{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{dacă } x \in \Omega \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Deci $\bar{f}_1 \in L^p(\mathbf{R}^N)$ şi (teorema IV.22) $\|\rho_n * \overline{f}_1 - \overline{f}_1\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \to 0$. Pe de altă parte

$$\mathrm{Supp}\,(\rho_n * \overline{f}_1) \subset B\left(0, \frac{1}{n}\right) + \mathrm{Supp}\, f_1 \subset \Omega$$

pentru n suficient de mare. Fie $u_n = (\rho_n * \overline{f}_1)_{|\Omega}$. Deci, pentru n suficient de mare, $u_n \in C_c(\Omega)$ şi, în plus, $\|u_n - f_1\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Deci, pentru n suficient de mare, $\|u_n - f\|_{L^p(\Omega)} < 2\varepsilon$.

[7]Tehnica de regularizare prin convoluţie a fost introdusă de Leray şi Friedrichs.

IV.5 Criteriu de compacitate tare în L^p

Este important să putem recunoaşte când o familie de funcţii $L^p(\Omega)$ este relativ compactă în $L^p(\Omega)$ pentru topologia tare. Să reamintim mai întâi teorema lui Ascoli, care răspunde la această întrebare în $C(K)$, unde K este un spaţiu **metric compact**.

• **Teorema IV.24 (Ascoli). – Fie K un spaţiu metric compact şi $\mathcal{H}$ o submulţime mărginită în $C(K)$. Presupunem că $\mathcal{H}$ este uniform echicontinuă, adică**

(21)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ **astfel încât** } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Atunci $\mathcal{H}$ este relativ compactă în $C(K)$.

Pentru demonstraţia teoremei lui Ascoli vezi Dixmier [1], Choquet [1], Dieudonné [1], Yosida [1].

Teorema următoare (şi corolarul său) reprezintă "versiuni L^p" ale teoremei lui Ascoli.

Notaţii.

1) Fie $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$ (translaţia lui f cu h).

2) Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă; spunem că un deschis ω este **tare inclus** în Ω şi scriem $\omega \subset\subset \Omega$ dacă $\overline{\omega} \subset \Omega$ ([8]) şi dacă $\overline{\omega}$ este compactă.

• **Teorema IV.25 (M. Riesz-Fréchet-Kolmogorov). – Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă şi $\omega \subset \Omega$. Fie $\mathcal{F}$ o submulţime mărginită în $L^p(\mathbf{R}^N)$ cu $1 \le p < \infty$. Presupunem că**

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 \text{ **astfel încât**}$$

$$(22) \qquad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \forall h \in \mathbf{R}^N \text{ cu } |h| < \delta.$$

Atunci $\mathcal{F}_{|\omega}$ este relativ compactă în $L^p(\omega)$. ([9])

---

[8] $\overline{\omega}$ semnifică închiderea lui ω în $\mathbf{R}^N$.

[9] Observăm că dacă $x \in \omega$ şi $|h| < \delta < \text{dist}\,(\omega, \Omega^c)$ atunci $x + h \in \Omega$ şi $f(x+h)$ are sens. Ipoteza (22) reprezintă o condiţie de echicontinuitate "integrală" apropiată lui (21).

Demonstraţie. – Putem presupune întotdeauna că Ω este mărginit. Pentru $f \in \mathcal{F}$ definim

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in \Omega \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Mulţimea

$$\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{f};\ f \in \mathcal{F}\}$$

este mărginită în $L^p(\mathbf{R}^N)$ şi în $L^1(\mathbf{R}^N)$. Distingem următoarele trei etape în demonstraţie:

a) Avem

$$\|(\rho_n * \overline{f}) - \overline{f}\|_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon \quad \forall f \in \overline{\mathcal{F}}, \quad \forall n > 1/\delta.$$

Intr-adevăr, avem

$$\begin{aligned} |(\rho_n * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)| &\leq \int_{\mathbf{R}^N} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|\rho_n(y)\,dy \\ &\leq \left[\int_{\mathbf{R}^N} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p \rho_n(y)\,dy\right]^{1/p}. \end{aligned}$$

Deci

$$|(\rho_n * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)|^p \leq \int_{B\left(0,\frac{1}{n}\right)} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p \rho_n(y)\,dy.$$

Rezultă că

$$\int_\omega |(\rho_n * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)|^p\,dx \leq \int_{B(0,1/n)} \rho_n(y)\,dy \int_\omega |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p\,dx \leq \varepsilon^p$$

dacă $1/n < \delta$ (conform (22)).

b) Familia $\mathcal{H} = (\rho_n * \overline{\mathcal{F}})_{|\overline{\omega}}$ verifică, pentru orice n, ipotezele teoremei lui Ascoli. Intr-adevăr, observăm mai întâi că

$$\|\rho_n * \overline{f}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \|\rho_n\|_{L^\infty} \|\overline{f}\|_{L^1} \leq C_n \quad \forall \overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}.$$

Pe de altă parte, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^N$ şi orice $\overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}$, ([10])

$$|(\rho_n * \overline{f})(x_1) - (\rho_n * \overline{f})(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \|\rho_n\|_{\mathrm{Lip}} \|\overline{f}\|_{L^1} \leq C_n |x_1 - x_2|.$$

[10] $\|\rho_n\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Sup}_{z_1 \neq z_2} \dfrac{|\rho_n(z_1) - \rho_n(z_2)|}{|z_1 - z_2|}$.

Rezultă că $\mathcal{H}$ este relativ compactă în $C(\overline{\omega})$ şi deci în $L^p(\omega)$.

c) Concluzia demonstraţiei. Fiind dat $\varepsilon > 0$, **fixăm** $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ astfel încât

$$\|(\rho_n * \overline{f}) - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Deoarece $\mathcal{H}$ este relativ compactă în $L^p(\omega)$, putem acoperi $\mathcal{H}$ cu un număr finit de bile de rază ε (în $L^p(\omega)$). Bilele corespunzătoare de rază 2ε acoperă atunci $\mathcal{F}_{|\omega}$. In consecinţă, $\mathcal{F}_{|\omega}$ este relativ compactă în $L^p(\omega)$.

Corolarul IV.26. – **Fie** $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ **o mulţime deschisă şi** $\mathcal{F}$ **o submulţime mărginită în** $L^p(\Omega)$ **cu** $1 \leq p < \infty$**.**

Presupunem că $\forall \varepsilon > 0$**,** $\forall \omega \subset\subset \Omega$**,** $\exists 0 < \delta < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$ **astfel încât**

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \quad \forall h \in \mathbf{R}^N,\ |h| < \delta,\ \forall f \in \mathcal{F}, \tag{23}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \omega \subset\subset \Omega \ \ \textbf{astfel încât} \ \ \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon \ \ \forall f \in \mathcal{F}. \tag{24}$$

Atunci $\mathcal{F}$ **este relativ compactă în** $L^p(\Omega)$.

Demonstraţie. – Fiind dat $\varepsilon > 0$ **fixăm** $\omega \subset\subset \Omega$ astfel încât

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon \ \ \forall f \in \mathcal{F}.$$

Conform teoremei IV.25, $\mathcal{F}_{|\omega}$ este relativ compactă în $L^p(\omega)$. Deci putem acoperi $\mathcal{F}_{|\omega}$ printr-un număr finit de bile de rază ε în $L^p(\omega)$. Fie

$$\mathcal{F}_{|\omega} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(g_i, \varepsilon) \quad \text{cu } g_i \in L^p(\omega).$$

Fie

$$\bar{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

(aceste bile sunt subînţelese în $L^p(\omega)$). Se verifică cu uşurinţă că $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(\bar{g}_i, 2\varepsilon)$ (aceste bile sunt subînţelese în $L^p(\Omega)$).

Remarca 12. – Reciproca corolarului IV.26 este adevărată (vezi [EX]).

REMARCA 13. – Fie $\mathcal{F}$ o submulţime mărginită în $L^p(\mathbf{R}^N)$ cu $1 \leq p < \infty$ verificând

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{astfel încât} \quad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} < \varepsilon \;\; \forall |h| < \delta, \;\; \forall f \in \mathcal{F}.$$

In general nu putem afirma că $\mathcal{F}$ este relativ compactă în $L^p(\mathbf{R}^N)$; putem afirma doar că $\mathcal{F}_{|\omega}$ este relativ compactă în $L^p(\omega)$ pentru orice ω deschisă şi mărginită în $\mathbf{R}^N$ (vezi un exemplu în [EX]).

Incheiem cu o altă aplicaţie simplă (dar utilă!) a teoremei IV.25.

Corolarul IV.27. – Fie $G \in L^1(\mathbf{R}^N)$ o funcţie fixată şi

$$\mathcal{F} = G * \mathcal{B},$$

unde $\mathcal{B}$ este o mulţime mărginită în $L^p(\mathbf{R}^N)$ cu $1 \leq p < \infty$.

Atunci $\mathcal{F}_{|\omega}$ este relativ compactă în $L^p(\omega)$ pentru orice mulţime deschisă şi mărginită ω în $\mathbf{R}^N$.

DEMONSTRAŢIE. – Este evident că $\mathcal{F}$ este mărginită în $L^p(\mathbf{R}^N)$. Pe de altă parte, dacă $f = G * u$ cu $u \in \mathcal{B}$, atunci

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} = \|(\tau_h G - G) * u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \leq C\|\tau_h G - G\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}.$$

Incheiem demonstraţia folosind

Lema IV.4. – Fie $G \in L^q(\mathbf{R}^N)$ cu $1 \leq q < \infty$. Atunci

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h G - G\|_{L^q(\mathbf{R}^N)} = 0.$$

DEMONSTRAŢIE. – Fie $\varepsilon > 0$ şi

$$G_1 \in C_c(\mathbf{R}^N) \quad \text{astfel încât} \quad \|G - G_1\|_{L^q(\mathbf{R}^N)} < \varepsilon.$$

Avem

$$\begin{aligned} \|\tau_h G - G\|_{L^q} &\leq \|\tau_h G - \tau_h G_1\|_{L^q} + \|\tau_h G_1 - G_1\|_{L^q} + \|G_1 - G\|_{L^q} \\ &\leq 2\varepsilon + \|\tau_h G_1 - G_1\|_{L^q}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, este evident că $\lim_{h\to 0} \|\tau_h G_1 - G_1\|_{L^q} = 0$ şi deci

$$\limsup_{h \to 0} \|\tau_h G - G\|_{L^q} \leq 2\varepsilon.$$

IV.6 Comentarii asupra capitolului IV

1) Am reamintit în §IV.1 câteva principii de bază ale teoriei Integrării. Printre rezultatele utile pe care nu le-am menţionat citām, între altele

$\star$ **Teorema IV.28 (Egorov). – Presupunem că** $|\Omega| < \infty$. **Fie** (f_n) **un şir de funcţii măsurabile de la** Ω **în R astfel încât**

$$f_n(x) \to f(x) \textbf{ a.p.t. în } \Omega \textbf{ (cu } |f(x)| < \infty \textbf{ a.p.t.)}.$$

Atunci $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \subset \Omega$ **măsurabilă astfel încât** $|\Omega \setminus A| < \varepsilon$ **şi** $f_n \to f$ **uniform pe** A.

Pentru demonstraţie, vezi Hewitt-Stromberg [1], Wheeden-Zygmund [1], Yosida [1], Marle [1], A.Friedman [3], Malliavin [1], Chae [1], Dieudonné [2].

2) Spaţiul măsurilor pe Ω. **Mulţimi slab compacte în** L^1.

Am văzut că mulţimile mărginite în $L^p(\Omega)$ sunt relativ compacte pentru topologia $\sigma(L^p, L^{p'})$ dacă $1 < p \leq \infty$. Din contră, $L^1(\Omega)$ nu este reflexiv şi putem demonstra chiar că $L^1(\Omega)$ nu este un spaţiu dual. Rezultă că mulţimile mărginite din $L^1(\Omega)$ nu au nici o proprietate de compacitate relativ la o topologie slabă. Pentru “a remedia acest inconvenient” **putem scufunda** $L^1(\Omega)$ **într-un spaţiu mai mare: spaţiul** $M(\Omega)$ **al măsurilor Radon pe** Ω.

Pentru aceasta considerăm spaţiul $E = C_c(\Omega)$ înzestrat cu norma $\|u\| = \text{Sup}_{x\in\Omega}|u(x)|$. Notăm dualul său E' prin $M(\Omega)$. Vom identifica $L^1(\Omega)$ cu un subspaţiu al lui $M(\Omega)$. Cu acest scop introducem aplicaţia $T : L^1(\Omega) \to M(\Omega)$ definită astfel: fiind dat $f \in L^1(\Omega)$, aplicaţia $u \in C_c(\Omega) \longmapsto \int fu$ este o funcţională liniară şi continuă pe $C_c(\Omega)$, notată Tf. Deci

$$\langle Tf, u\rangle_{E',E} = \int fu.$$

Verificăm cu uşurinţă că T este un operator liniar şi continuu de la $L^1(\Omega)$ în $M(\Omega)$ şi că

$$\|Tf\|_{M(\Omega)} = \text{Sup}\left\{\int fu;\ u \in C_c(\Omega), \|u\| \leq 1\right\} = \|f\|_{L^1(\Omega)} \quad \text{(vezi [EX])};$$

altfel spus, T este o izometrie de la $L^1(\Omega)$ în $M(\Omega)$. De aceea putem identifica $L^1(\Omega)$ cu un subspaţiu al lui $M(\Omega)$. Mulţimile mărginite din $L^1(\Omega)$

sunt relativ compacte în $M(\Omega)$ pentru topologia slabă $\star$ $\sigma(M, C_c)$. De asemenea, observăm că dacă (f_n) este un şir mărginit în $L^1(\Omega)$ atunci există un subşir (f_{n_k}) care este convergent către o măsură μ pentru topologia $\sigma(M, C_c)$, adică

$$\int f_{n_k} u \to \langle \mu, u \rangle \quad \forall u \in C_c(\Omega).$$

Semnalăm acum următoarea întrebare delicată: Care sunt mulţimile din $L^1(\Omega)$ care sunt relativ compacte pentru topologia $\sigma(L^1, L^\infty)$?

Răspunsul la această întrebare este furnizat de

$\star$ **Teorema IV.29 (Dunford-Pettis). – Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă şi mărginită (pentru a simplifica). Fie $\mathcal{F} \subset L^1(\Omega)$ o submulţime mărginită.**

Atunci $\mathcal{F}$ este relativ compactă pentru topologia $\sigma(L^1, L^\infty)$ dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \textbf{astfel încât} \ \int_A |f| < \varepsilon \quad \forall A \subset \Omega, \ |A| < \delta, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Pentru demonstraţie, vezi Dunford-Schwartz [1], Beauzamy [1], Neveu [1], Dellacherie-Meyer [1] (capitolul I) sau [EX].

3) Funcţii cu valori vectoriale

Fie Ω un deschis în $\mathbf{R}^N$ şi E un spaţiu Banach. Definim $L^p(\Omega; E)$ ca fiind spaţiul funcţiilor definite pe Ω cu valori în E, măsurabile **într-un sens care trebuie precizat**, astfel încât $\int_\Omega \|f(x)\|^p \, dx < \infty$ (cu modificarea uzuală dacă $p = \infty$). Majoritatea proprietăţilor întâlnite în §IV.2 şi §IV.3 rămân valabile, sub ipoteze convenabile asupra lui E (E separabil sau E reflexiv). De exemplu, dacă E este reflexiv şi $1 < p < \infty$, atunci $L^p(\Omega; E)$ este reflexiv şi dualul său se identifică cu $L^{p'}(\Omega; E')$ (vezi Edwards [1], L.Schwartz [5] şi Marle [1] dacă E este un spaţiu Hilbert). Aceste spaţii joacă un rol important în teoria ecuaţiilor de evoluţie (Ω este atunci un interval în $\mathbf{R}$).

4) Teoria interpolării

Cităm un rezultat frapant, care este punctul de plecare în această teorie.

Teorema IV.29 (M. Riesz-Thorin, Marcinkiewicz). – Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă şi mărginită (pentru a simplifica). Fie

$T : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ **un operator liniar şi continuu. Presupunem că** $T : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$**.**

Atunci $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ **pentru orice** $1 < p < \infty$**.**

Pentru demonstraţie vezi de exemplu Dunford-Schwartz [1], Stein-Weiss [1], Bergh-Löfström [1], Reed-Simon [1] (volumul 2) şi [EX]. Teoria interpolării a fost dezvoltată de Lions, Peetre, Calderon, Stein şi alţii. Ea constituie un instrument foarte util în Analiză şi, în particular, în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale, vezi de exemplu Lions-Magenes [1].

5) Inegalitatea lui Young

$\star$ **Teorema IV.30 (Young). – Fie** $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ **şi** $g \in L^q(\mathbf{R}^N)$ **cu** $1 \leq p \leq \infty$**,** $1 \leq q \leq \infty$ **şi** $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 \geq 0$**.**

Atunci $f * g \in L^r(\mathbf{R}^N)$ **şi** $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Pentru o demonstraţie vezi de exemplu [EX].

6) Noţiunea de convoluţie – generalizată la distribuţii (vezi L. Schwartz [1]) – joacă un rol fundamental în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale liniare. Aceasta provine, între altele, din faptul că putem exprima soluţia unei ecuaţii $P(D)u = f$ (unde $P(D)$ este un operator diferenţial cu coeficienţi constanţi) sub forma $u = E * f$, unde E este **soluţia fundamentală** a lui $P(D)$ (teorema lui Malgrange-Ehrenpreis); vezi comentariul 2b) din capitolul I.

Capitolul V

SPAŢII HILBERT

V.1 Definiţii. Proprietăţi elementare. Proiecţia pe o mulţime convexă închisă

Definiţie. Fie H un spaţiu vectorial. Un **produs scalar** (u, v) este o formă biliniară pe $H \times H$ cu valori în $\mathbf{R}$, simetrică, pozitiv definită [adică $(u, u) \geq 0$ $\forall u \in H$ şi $(u, u) > 0$ dacă $u \neq 0$].

Reamintim că un produs scalar satisface **inegalitatea lui Cauchy-Schwarz**

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2} \qquad \forall u, v \in H.$$

[Este uneori util să reţinem că demonstraţia inegalităţii lui Cauchy-Schwarz nu face apel la presupunerea $(u, u) > 0$ dacă $u \neq 0$].

Reamintim de asemenea că $|u| = (u, u)^{1/2}$ este o normă ([1]). [Intr-adevăr avem $|u + v|^2 = |u|^2 + 2(u, v)|v|^2 \leq |u|^2 + 2|u|\,|v| + |v|^2$].

Reamintim în sfârşit **"identitatea paralelogramului"**:

$$(1) \qquad \left|\frac{a + b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a - b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2) \quad \forall a, b \in H.$$

Definiţie. – Un **spaţiu Hilbert** este un spaţiu vectorial H inzestrat cu un produs scalar astfel încât H este **complet** în norma $|\ |$.

In ceea ce urmează H **va desemna întotdeauna un spaţiu Hilbert**.

Exemplu fundamental: $L^2(\Omega)$ inzestrat cu produsul scalar

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$$

[1] Vom nota adeseori $|\ |$ (în loc de $\|\ \|$) norma asociată unui produs scalar.

este un spaţiu Hilbert. Spaţiul Sobolev H^1 studiat în Capitolele VIII şi IX este un alt exemplu de spaţiu Hilbert "modelat" pe $L^2(\Omega)$.

• **Propoziţia V.1. –** H **este uniform convex şi deci reflexiv.**

DEMONSTRAŢIE. – Fie $\varepsilon > 0$ şi $u, v \in H$ astfel încât $|u| \leq 1, |v| \leq 1$ şi $|u - v| > \varepsilon$. Având în vedere legea paralelogramului, obţinem

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^2 < 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

şi de aceea

$$\left|\frac{u+v}{2}\right| < 1 - \delta \text{ cu } \delta = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2} > 0.$$

• **Teorema V.2 (Proiecţia pe o mulţime convexă închisă). – Fie** $K \subset H$ **o mulţime convexă, închisă şi nevidă. Atunci, pentru orice** $f \in H$ **există un element unic** $u \in K$ **astfel încât**

$$|f - u| = \mathrm{Min}_{v \in K} |f - v| = \mathrm{dist}\,(f, K). \tag{2}$$

In plus, u **este caracterizat de proprietatea:**

$$\boxed{u \in K \quad \textbf{şi} \quad (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K.} \tag{3}$$

Notaţie. Elementul u de mai sus este numit **proiecţia** lui f pe K şi este notat prin $u = P_K f$.

DEMONSTRAŢIE. –

a) **Existenţa**. – Vom prezenta două demonstraţii diferite:

1) Funcţia $\varphi(v) = |f - v|$ este convexă, continuă şi $\lim\limits_{|v| \to \infty} \varphi(v) = +\infty$. Urmează, din corolarul III.20, că φ îşi atinge minimul pe K deoarece H este reflexiv.

2) A doua demonstraţie nu se bazează pe teoria spaţiilor reflexive. Fie (v_n) un şir minimizant pentru (2), adică $v_n \in K$ şi

$$d_n = |f - v_n| \to d = \mathrm{Inf}_{v \in K} |f - v|.$$

Afirmăm că (v_n) este un şir Cauchy. Intr-adevăr, legea paralelogramului aplicată cu $a = f - v_n$ şi $b = f - v_m$ conduce la

$$\left|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right|^2 + \left|\frac{v_n - v_m}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2).$$

Dar $\dfrac{v_n + v_m}{2} \in K$ şi de aceea $\left|f - \dfrac{v_n + v_m}{2}\right| \geq d$. Urmează că

$$\left|\frac{v_n - v_m}{2}\right|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 \quad \text{şi} \quad \lim_{m,n\to\infty} |v_n - v_m| = 0.$$

Astfel şirul (v_n) converge la o anumită limită $u \in K$ cu $d = |f - u|$.

b) **Echivalenţa dintre (2) şi (3)**.

Presupunem că $u \in K$ satisface (2) şi fie $w \in K$. Avem

$$v = (1 - t)u + tw \in K \quad \forall t \in (0, 1]$$

şi astfel

$$|f - u| \leq |f - [(1 - t)u + tw]| = |(f - u) - t(w - u)|.$$

De aceea

$$|f - u|^2 \leq |f - u|^2 - 2t(f - u, w - u) + t^2|w - u|^2.$$

care implică $2(f-u, w-u) \leq t|w-u|^2 \quad \forall t \in (0, 1]$. Când $t \to 0$ obţinem (3).

Reciproc, presupunem că u satisface (3). Atunci avem

$$|u - f|^2 - |v - f|^2 = 2(f - u, v - u) - |u - v|^2 \leq 0 \quad \forall v \in K;$$

care implică (2).

c) **Unicitatea**.

Presupunem că u_1 şi u_2 satisfac (3). Avem

$$(f - u_1, v - u_1) \leq 0 \quad \forall v \in K \tag{4}$$

$$(f - u_2, v - u_2) \leq 0 \quad \forall v \in K. \tag{5}$$

Alegând $v = u_2$ în (4) şi $v = u_1$ în (5) şi adunând inegalităţile corespunzătoare găsim $|u_1 - u_2|^2 \leq 0$ ([2]).

[2] Unicitatea lui u, sub forma (2) rezultă şi direct din proprietatea de strict convexitate a normei unui spaţiu Hilbert.

Propoziţia V.3. – Fie $K \subset H$ o mulţime convexă, închisă şi nevidă. Atunci P_K nu măreşte distanţa, adică

$$|P_K f_1 - P_K f_2| \leq |f_1 - f_2| \quad \forall f_1, f_2 \in H.$$

Demonstraţie. Definim $u_1 = P_K f_1$ şi $u_2 = P_K f_2$. Avem

$$(f_1 - u_1, v - u_1) \leq 0 \quad \forall v \in K \tag{6}$$

$$(f_2 - u_2, v - u_2) \leq 0 \quad \forall v \in K. \tag{7}$$

Alegând $v = u_2$ în (7) şi $v = u_1$ în (5) şi adunând inegalităţile corespunzătoare găsim

$$|u_1 - u_2|^2 \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2).$$

Urmează că $|u_1 - u_2| \leq |f_1 - f_2|$.

Corolarul V.4. – Presupunem că $M \subset H$ este un subspaţiu liniar închis. Fie $f \in H$. Atunci $u = P_M f$ este caracterizat de

$$\boxed{u \in M \quad \textbf{şi} \quad (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M.} \tag{8}$$

Mai mult, P_M este un operator liniar.

Demonstraţie. Din (3) avem

$$(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in M$$

şi astfel

$$(f - u, tv - u) \leq 0 \quad \forall v \in M, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Urmează că (8) este valabilă.

Reciproc, dacă u satisface (8) avem

$$(f - u, v - u) = 0 \quad \forall v \in M.$$

Este evident că P_M este liniar.

V.2 Dualul unui spaţiu Hilbert

• Teorema V.5 (Teorema de reprezentare a lui Riesz-Fréchet).
– Fiind dată $\varphi \in H'$ există şi este unic $f \in H$ astfel încât

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u) \quad \forall u \in H.$$

Mai mult,

$$|f| = \|\varphi\|_{H'}.$$

Demonstraţie. Incă o dată vom expune două demonstraţii:

1) Prima dintre ele este aproape identică cu demonstraţia teoremei IV.11. Considerăm aplicaţia $T : H \to H'$ definită după cum urmează: pentru orice $f \in H$ dat, aplicaţia $u \mapsto (f, u)$ este o funcţională liniară şi continuă pe H. Aceasta defineşte un element din H' pe care îl notăm Tf astfel încât

$$\langle Tf, u \rangle = (f, u) \quad \forall u \in H.$$

Este limpede că $\|Tf\|_{H'} = |f|$. Astfel T este o izometrie liniară de la H la $T(H)$—un subspaţiu închis al lui H'. Pentru a concluziona este suficient să arătăm că $T(H)$ este dens în H'. Presupunem că h este o funcţională liniară şi continuă pe H' care se anulează pe $T(H)$. Deoarece H este **reflexiv**, h aparţine lui H şi satisface $\langle Tf, h \rangle = 0 \quad \forall f \in H$. Urmează că $(f, h) = 0 \quad \forall f \in H$ şi de aceea $h = 0$.

2) Demonstraţia a doua conţine o explicaţie mult mai directă care evită orice utilizare a reflexivităţii. Fie $M = \varphi^{-1}(\{0\})$ – astfel încât M este un subspaţiu închis al lui H. Putem presupune întotdeauna că $M \neq H$ (altfel $\varphi \equiv 0$ şi concluzia teoremei V.5 este evidentă – luând $f = 0$). Afirmăm că există un anume element $g \in H$ astfel încât

$$|g| = 1 \quad \text{şi} \quad (g, v) = 0 \quad \forall v \in M \text{ (şi, de aceea, } g \notin M).$$

Intr-adevăr, fie $g_0 \in H$ cu $g_0 \notin M$. Fie $g_1 = P_M g_0$. Atunci

$$g = \frac{g_0 - g_1}{|g_0 - g_1|}$$

satisface proprietăţile cerute.

Pentru orice $u \in H$ dat, definim

$$v = u - \lambda g \text{ cu } \lambda = \frac{\langle \varphi, u\rangle}{\langle \varphi, g\rangle}$$

Subliniem că v este bine definit deoarece $\langle \varphi, g\rangle \neq 0$ şi, mai mult, $v \in M$ deoarece $\langle \varphi, v\rangle = 0$. Urmează că $(g, v) = 0$, adică

$$\langle \varphi, u\rangle = \langle \varphi, g\rangle (g, u) \quad \forall u \in H$$

care încheie demonstraţia cu $f = \langle \varphi, g\rangle g$.

• Remarca 1. – H **şi** H'**: a identifica sau a nu identifica? – Tripletul** $V \subset H \subset V'$.

Teorema V.5 afirmă că există o izometrie canonică de la H la H'. De aceea este "legitim" să identificăm H şi H'. Vom face **adeseori** acest lucru dar **nu întotdeauna**. Aici este o situaţie tipică – care se întâlneşte în multe aplicaţii – unde ar trebui să fim atenţi cu identificările. Presupunem că H este un spaţiu Hilbert cu produsul scalar $(\ ,\ )$ şi norma corespunzătoare $|\ |$. Presupunem că $V \subset H$ este un subspaţiu liniar care este dens în H. Presupunem că V are norma $\|\ \|$ şi că V este un spaţiu Banach cu norma $\|\ \|$. Presupunem că injecţia canonică $V \subset H$ este continuă, adică

$$|v| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V.$$

Identificăm H' **şi** H. Putem în acest caz să scufundăm H în V' conform procedeului următor: fiind dat $f \in H$, aplicaţia $v \in V \longmapsto (f, v)$ este o funcţională liniară şi continuă pe H şi deci şi pe V; notăm $Tf \in V'$. Deci

$$\langle Tf, v\rangle_{V',V} = (f, v) \qquad \forall f \in H, \;\; \forall v \in V.$$

Este uşor de observat că T are următoarele proprietăţi:

(i) $\|T\varphi\|_{V'} \leq C|\varphi|_{H'} \quad \forall \varphi \in H'$,

(ii) T este injectiv,

(iii) $R(T)$ este dens în V ([3]).

[3] Totuşi, T **nu este surjectiv**, în general.

Cu ajutorul lui T scufundăm H în V' şi avem

$$V \subset H = H' \subset V', \tag{9}$$

unde toate injecţiile sunt continue şi dense. Se spune că H este **spaţiul "pivot"**.

Presupunem acum că V, în loc să fie un spaţiu Banach general, este un spaţiu Hilbert cu propriul său produs scalar $((\ ,\ ))$ asociat normei $\|\ \|$. Am putea, desigur, să identificăm V' şi V cu ajutorul lui $((\ ,\ ))$. Totuşi (9) devine absurd. Aceasta arată că **nu** se pot face **simultan** cele două identificări: va trebui făcută o alegere. De obicei se preferă identificarea $H' = H$, cu (9) drept consecinţă, şi nu se identifică V' cu V. Asupra acestui subiect recomandăm cititorului să mediteze asupra exemplului următor:

$$H = \ell^2 = \left\{ u = (u_n)_{n\geq 1}\,;\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < \infty \right\}$$

înzestrat cu produsul scalar $(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$.

$$V = \left\{ u = (u_n)_{n\geq 1};\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 < \infty \right\}$$

înzestrat cu produsul scalar $((u,v)) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n v_n$.

Remarca 2. – Folosind izomorfismul Riesz-Fréchet (şi a doua demonstraţie a teoremei V.5) am putea stabili **direct** că H este reflexiv fără a trece prin teoria spaţiilor uniform convexe.

Remarca 3. – Dacă facem identificarea $H' = H$, atunci ortogonalul $M^\perp$ al unui subspaţiu $M \subset H$ este considerat ca un subspaţiu al lui H şi

$$M^\perp = \{u \in H; (u,v) = 0 \quad \forall v \in M\}.$$

Intr-un spaţiu Hilbert orice subspaţiu închis admite un suplement topologic (vezi capitolul II.4). Intr-adevăr, este clar (conform corolarului V.4) că dacă M este un subspaţiu închis atunci

$$M \cap M^\perp = \{0\} \qquad \text{şi} \qquad M + M^\perp = H.$$

V.3 Teoremele lui Stampacchia şi Lax-Milgram

Definiţie. – O formă biliniară $a(u,v) : H \times H \to \mathbf{R}$ se spune a fi

(i) **continuă** dacă există o constantă C astfel încât

$$|a(u,v)| \le C|u|\,|v| \quad \forall u, v \in H.$$

(ii) **coercivă** dacă există o constantă $\alpha > 0$ astfel încât

$$a(v,v) \ge \alpha|v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Teorema V.6 (Stampacchia). – Presupunem că $a(u,v)$ este o formă biliniară continuă şi coercivă pe H. Fie $K \subset H$ o submulţime nevidă, închisă şi convexă. Atunci, pentru orice $\varphi \in H'$ dat, există un element unic $u \in K$ astfel încât

(10) $$a(u, v-u) \ge \langle \varphi, v-u \rangle \quad \forall v \in K.$$

Mai mult, dacă a este simetric, atunci u este caracterizat de proprietatea:

(11) $$\boxed{u \in K \quad \textbf{şi} \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \mathrm{Min}_{v \in K}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle\right\}.}$$

Demonstraţia teoremei V.6 se bazează pe următorul rezultat clasic:

• **Teorema V.7 (Teorema de punct fix a lui Banach – metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard). – Fie X un spaţiu metric complet şi $S : X \to X$ o contracţie strictă, adică**

$$d(Sv_1, Sv_2) \le k\, d(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \quad \textbf{cu } k < 1.$$

Atunci S are un punct fix unic, $u = Su$.

(vezi pentru demonstraţie Choquet [1] sau L. Schwartz [2]).

Demonstraţia teoremei V.6. – Din teorema de reprezentare a lui Riesz-Fréchet (teorema V.5) cunoaştem că există un element unic $f \in H$ astfel încât

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in H.$$

Pe de altă parte, dacă **fixăm** $u \in H$, aplicaţia $v \mapsto a(u,v)$ este o funcţională liniară şi continuă pe H. Utilizând încă o dată teorema de reprezentare a lui Riesz-Fréchet găsim un anumit element unic în H, notat cu Au, astfel încât $a(u,v) = (Au, v) \quad \forall v \in H$. Evident A este un operator liniar de la H la H satisfăcând

$$|Au| \leq C|u| \qquad \forall u \in H \tag{12}$$

$$(Au, u) \geq \alpha |u|^2 \qquad \forall u \in H. \tag{13}$$

Problema (10) se reduce la a găsi un anume $u \in K$ astfel încât

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K. \tag{14}$$

Fie $\rho > 0$ o constantă (care va fi determinată mai târziu). Punctăm că problema (14) este echivalentă cu

$$(\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K \tag{15}$$

adică

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u).$$

Pentru orice $v \in K$, punem $Sv = P_K(\rho f - \rho Av + v)$. Afirmăm că dacă $\rho > 0$ este ales convenabil atunci S este o contracţie strictă. Intr-adevăr, deoarece P_K nu măreşte distanţa (vezi propoziţia V.3) avem

$$|Sv_1 - Sv_2| \leq |(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)|$$

şi astfel

$$\begin{aligned} |Sv_1 - Sv_2|^2 &= |v_1 - v_2|^2 - 2\rho(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2) + \rho^2 |Av_1 - Av_2|^2 \\ &\leq |v_1 - v_2|^2 (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2). \end{aligned}$$

Alegând $\rho > 0$ în aşa fel încât $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1$ (se ia $0 < \rho < 2\alpha / C^2$) găsim că S are un punct fix unic ([4]).

Presupunem acum că forma $a(u,v)$ este şi **simetrică**. Atunci $a(u,v)$ defineşte un **nou produs scalar** pe H; norma corespunzătoare $a(u,u)^{1/2}$

[4] Dacă trebuie să **calculăm** punctul fix printr-o metodă iterativă, este profitabil să alegem $\rho = \alpha / C^2$ pentru a minimiza k şi pentru a accelera convergenţa iteraţiilor lui S.

este echivalentă cu norma originală $|u|$. Urmează că H este, de asemenea, un spaţiu Hilbert pentru acest nou produs scalar. Utilizând teorema lui Riesz-Fréchet putem acum reprezenta funcţionala φ prin intermediul noului produs scalar, adică există un element unic $g \in H$ astfel încât

$$\langle \varphi, v \rangle = a(g, v) \quad \forall v \in H.$$

Problema (10) înseamnă a găsi un anume $u \in K$ astfel încât :

$$a(g - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K. \tag{16}$$

Soluţia lui (16) este un prieten vechi: u este pur şi simplu **proiecţia pe** K **a lui** g **pentru noul produs scalar** a. Cunoaştem, de asemenea, (din teorema V.2) că u este unicul element din K în care este atins

$$\mathrm{Min}_{v \in K} a(g - v, g - v)^{1/2}.$$

Aceasta înseamnă a minimiza pe K funcţia:

$$\begin{aligned} v \mapsto a(g - v, g - v) \ &= a(v, v) - 2a(g, v) + a(g, g) \\ &= a(v, v) - 2\langle \varphi, v \rangle + a(g, g), \end{aligned}$$

sau, echivalent, funcţia

$$v \mapsto \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle.$$

Remarca 4. – Este uşor de verificat că dacă $a(u, v)$ este o formă biliniară cu proprietatea

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H$$

atunci funcţia $v \mapsto a(v, v)$ este **convexă**.

• **Corolarul V.8 (Lax-Milgram). – Presupunem că** $a(u, v)$ **este o formă biliniară, continuă şi coercivă pe** H. **Atunci, pentru orice** $\varphi \in H'$ **dat, există un element unic** $u \in H$ **astfel încât**

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H. \tag{17}$$

Mai mult, dacă a este simetrică, atunci u este caracterizat de proprietatea

$$(18) \qquad \boxed{u \in H \quad \textbf{şi} \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle\varphi, u\rangle = \mathrm{Min}_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle\varphi, v\rangle\right\}}.$$

Demonstraţie. Folosiţi teorema V.6 cu $K = H$ şi procedaţi ca în demonstraţia corolarului V.4.

Remarca 5. – Teorema lui Lax-Milgram este un intrument simplu şi eficient pentru rezolvarea ecuaţiilor cu derivate parţiale eliptice liniare (vezi Capitolele VIII şi IX). Este interesant de subliniat conexiunea dintre ecuaţia (17) şi problema de minimizare (18). Când astfel de probleme apar în mecanică sau fizică adeseori au o interpretare naturală: principiul acţiunii minime, minimizarea energiei, etc. In limbajul calculului variaţional se spune că (17) este **ecuaţia lui Euler** asociată problemei de minimizare (18). In acest sens notăm că ecuaţia (17) apare atunci când scriem "$F'(u) = 0$", unde F este funcţia $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle\varphi, v\rangle$.

Remarca 6. – Există un argument direct şi elementar ce demonstrează că (17) are o soluţie unică. Intr-adevăr, aceasta echivalează cu a arăta că:

$$\forall f \in H \quad \exists u \in H \quad \text{unic astfel încât} \quad Au = f,$$

adică A este bijectiv de la H la H. Aceasta este o consecinţă trivială a următoarelor fapte:

(a) A este **injectiv** (deoarece A este coerciv),

(b) $R(A)$ este **închis** deoarece $\alpha|v| \leq |Av| \quad \forall v \in H$ (o consecinţă a coercivităţii),

(c) $R(A)$ este **dens**; într-adevăr, presupunem că $v \in H$ satisface

$$(Au, v) = 0 \qquad \forall u \in H$$

atunci $v = 0$.

V.4 Sume Hilbertiene. Bază Hilbertiană

Definiţie. – Fie $(E_n)_{n\geq 1}$ un şir de subspaţii închise ale lui H. Se spune că H este **suma Hilbertiană** a lui E_n şi se scrie $H = \oplus_n E_n$ dacă:

(a) Spaţiile E_n sunt reciproc ortogonale, adică

$$(u, v) = 0 \quad \forall u \in E_n, \quad \forall v \in E_m,\ m \neq n$$

(b) Spaţiul vectorial generat de E_n este dens în H ([5])

• **Teorema V.9. – Presupunem că H este suma Hilbert a lui $(E_n)_{n\geq 1}$. Fiind dat $u \in H$, definim $u_n = P_{E_n} u$.**

Atunci

(a) $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$**, adică** $u = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} u_n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 = |u|^2$ **(identitatea lui Bessel-Parseval).**

Reciproc, fiind dat un şir (u_n) în H astfel încât $u_n \in E_n$ $\forall n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$, atunci seria $\sum_n u_n$ este convergentă şi $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ verifică $u_n = P_{E_n} u$.

Demonstraţie. – Fie $S_k = \sum_{n=1}^{k} P_{E_n}$; S_k este un operator liniar şi continuu de la H în H. Pentru $u \in H$ avem

$$|S_k u|^2 = \sum_{n=1}^{k} |u_n|^2. \tag{19}$$

Pe de altă parte (corolarul V.4) avem

$$(u, u_n) = |u_n|^2$$

şi, prin adunare,

$$(u, S_k u) = |S_k u|^2.$$

Deci

$$|S_k u| \leq |u| \quad \forall u \in H. \tag{20}$$

Fie F spaţiul vectorial generat de (E_n). Fie $\varepsilon > 0$ şi $\bar{u} \in F$ astfel încât $|u - \bar{u}| \leq \varepsilon$. Pentru k suficient de mare avem $S_k \bar{u} = \bar{u}$. Pe de altă parte (conform (20)) avem

$$|S_k u - S_k \bar{u}| \leq |u - \bar{u}|.$$

[5]Spaţiul liniar generat de E_n este înţeles a fi în sens algebric, adică combinaţii liniare **finite** de elemente aparţinând spaţiilor (E_n).

Prin urmare $|S_k u - u| \leq 2|u - \bar{u}| \leq 2\varepsilon$ pentru k suficient de mare, adică $\lim_{k\to\infty} S_k u = u$.

Din (19) deducem atunci (b).

REMARCA 7. – In general $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \infty$ şi deci seria $\sum u_n$ **nu** este normal (absolut) convergentă.

Definiţie. – Se numeşte **bază Hilbertiană** (sau simplu bază, dacă nu există pericol de confuzie ([6]) un şir (e_n) de elemente din H astfel încât

(i) $|e_n| = 1 \quad \forall n$ şi $(e_m, e_n) = 0 \quad \forall m \neq n$.

(ii) Spaţiul liniar generat de e_n este dens în H.

Din teorema V.9 rezultă că dacă (e_n) este o bază Hilbertiană atunci orice $u \in H$ se scrie

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n \quad \text{cu} \quad |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2.$$

Reciproc, fiind dat un şir $(\alpha_n) \in \ell^2$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge către un element notat u şi avem

$$(u, e_n) = \alpha_n \quad \text{şi} \quad |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2.$$

• **Teorema V.10. – Orice spaţiu Hilbert separabil are o bază Hilbertiană.**

DEMONSTRAŢIE. – Fie (v_n) o submulţime numărabilă densă a lui H. Notăm cu F_k spaţiul liniar generat de $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$. Şirul (F_k) este un şir monoton crescător de spaţii finit dimensionale astfel încât $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ este dens în H. Alegem orice vector unitate e_1 din F_1. Dacă $F_2 \neq F_1$ există un anume vector e_2 în F_2 astfel încât $\{e_1, e_2\}$ este o bază ortonormală a lui F_2. Repetând aceeaşi construcţie se obţine o bază Hilbertiană a lui H.

REMARCA 8. – Dacă H **nu** este separabil, se poate stabili (folosind lema lui Zorn) existenţa unei baze Hilbertiene **nenumărabile** $(e_i)_{i\in I}$.

[6] A nu se confunda cu o **bază algebrică** adică o familie (e_i) din H cu proprietatea că orice element din H se scrie în mod unic ca o combinaţie **finită** de elemente e_i.

Teorema V.9 rămâne valabilă dacă se înlocuiesc seriile convergente cu familii sumabile (vezi Choquet [1] sau L. Scawartz [2]).

REMARCA 9. – Teorema V.10 arată că toate spaţiile Hilbert separabile sunt izomorfe şi izometrice cu spaţiul ℓ^2. În pofida acestui rezultat (aparent spectaculos!) este totuşi foarte important să considerăm alte spaţii Hilbert ca de pildă $L^2(\Omega)$ (sau spaţiul Sobolev $H^1(\Omega)$).

REMARCA 10. – Vom vedea în capitolul VI cum se construieşte o bază Hilbertiană formată din vectorii proprii ai unui operator autoadjunct compact. In $L^2(\Omega)$ se utilizează foarte des **baze speciale formate din funcţii proprii** ale unui operator diferenţial (cf. §VIII.6 şi §IX.8). De exemplu, în $L^2(0, \pi)$ baza formată din funcţiile

$$\left(\sqrt{2}\pi \,\sin nx\right)_{n\geq 1} \qquad \text{sau} \qquad \left(\sqrt{2}\pi \,\cos nx\right)_{n\geq 0}$$

are aplicaţii în dezvoltările în serie Fourier şi Analiza armonică; vezi de exemplu Katznelson [1]. In ceea ce priveşte bazele asociate funcţiilor Bessel, Legendre, Hermite, Laguerre, Tchebichev, Jacobi, etc. cititorul poate consulta Courant–Hilbert [1], volumul 1.

V.5 Comentarii asupra capitolului V

⋆ 1) Caracterizarea spaţiilor Hilbert.

Este uneori util de cunoscut când o normă $\| \; \|$ dată pe un spaţiu vectorial E este o normă Hilbertiană, adică când există un produs scalar $(\, , \,)$ pe E astfel încât

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} \quad \forall u \in E.$$

Sunt cunoscute diverse criterii:

(*a*) **Teorema V.11 (Fréchet-Von Neumann-Jordan). – Presupunem că norma $\| \; \|$ satisface legea paralelogramului (1). Atunci $\| \; \|$ este o normă Hilbertiană.**

Pentru demonstraţie vezi Yosida [1] sau [EX].

(*b*) **Teorema V.12 (Kakutani [1]). – Presupunem că E este un spaţiu normat cu dim $E \geq 3$. Presupunem că fiecare subspaţiu F**

de dimensiune 2 **are un operator de proiecţie de normă** 1 **(adică există un operator de proiecţie liniar şi mărginit** $P : E \to F$ **astfel încât** $Pu = u$ **pentru orice** $u \in F$ **şi** $\|P\| \leq 1$**).**

Atunci $\| \ \|$ **este o normă Hilbertiană** (7)**.**

(c) **Teorema V.13 (de Figueiredo-Karlovitz [1]).** – **Fie** E **un spaţiu normat de dimensiune dim** $E \geq 3$**. Fie**

$$Tu = \begin{cases} u & \textbf{dacă } \|u\| \leq 1, \\ \dfrac{u}{\|u\|} & \textbf{dacă } \|u\| > 1. \end{cases}$$

Presupunem că

$$\|Tu - Tv\| \leq \|u - v\| \quad \forall u, v \in E.$$

Atunci $\| \ \|$ **este o normă Hilbertiană** (8)**.**

In final reamintim un rezultat care deja a fost menţionat (remarca II.8):

(d) **Teorema V.14 (Lindenstrauss-Tzafriri [1]).** – **Presupunem că** E **este un spaţiu Banach astfel încât fiecare subspaţiu închis are un suplement topologic. Atunci** E **este Hilbertizabil, adică există o normă Hilbertiană echivalentă** (9)**.**

2) Inegalităţi variaţionale

Teorema lui Stampacchia este punctul de plecare al teoriei **inegalităţilor variaţionale** (vezi Kinderlehrer-Stampacchia [1]), care are numeroase aplicaţii în mecanică şi în fizică (vezi Duvaut-Lions [1]), în control optimal (vezi Lions [2]), în controlul stocastic (vezi Bensoussan-Lions [1]), etc.

---

[7] Atragem atenţia supra faptului că orice subspaţiu de dimensiune 1 are **întotdeauna** un operator de proiecţie de normă 1 (conform teoremei Hahn-Banach).

[8] Se poate arăta că într-un spaţiu normat **arbitrar** T satisface

$$\|Tu - Tv\| \leq 2 \, \|u - v\| \quad \forall u, v \in E$$

şi că, în general, constanta 2 nu poate fi îmbunătăţită.

[9] Este echivalent cu a spune că fiecare subspaţiu închis are un operator de proiecţie continuu P. Punctăm că aici – în contrast cu teorema V.12 – nu presupunem că $\|P\| \leq 1$.

3) Ecuaţii neliniare asociate operatorilor monotoni

Teoremele lui Stampacchia şi Lax-Milgram se extind la unele clase de operatori **neliniari**. Menţionăm de exemplu:

Teorema 5.15 (Minty-Browder). – Fie E un spaţiu Banach reflexiv. Fie $A : E \to E'$ o aplicaţie neliniară continuă astfel încât

$$\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2\rangle > 0 \quad \forall v_1, v_2 \in E, \quad v_1 \neq v_2$$

şi

$$\lim_{\|v\|\to\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} = \infty.$$

Atunci, pentru orice $f \in E'$ există o soluţie unică $u \in E$ a ecuaţiei $Au = f$.

$\star$ 4) Baze în spaţii Banach

Noţiunea de bază se extinde la spaţiile Banach. Un şir $(e_n)_{n\geq 1}$ se spune că este o **bază Schauder** în spaţiul Banach E dacă pentru fiecare $u \in E$ există un şir unic $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ în $\mathbf{R}$ astfel încât $u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. Astfel de baze joacă un rol important în geometria spaţiilor Banach (vezi Lindenstrauss-Tzafriri [2]). Toate spaţiile Banach (separabile) clasice utilizate în Analiză au o bază Schauder (vezi I. Singer [1]). Acest fapt l-a condus pe Banach la supoziţia că fiecare spaţiu Banach separabil are o bază Schauder. După puţine decenii de încercări nereuşite un contraexemplu a fost descoperit de către Enflo [1]. Se pot construi chiar subspaţii închise ale lui ℓ^p (cu $1 < p < \infty$, $p \neq 2$) fără o bază Schauder (vezi Lindenstrauss-Tzafriri [2]). Recent Szankowski a găsit un exemplu mult mai surprinzător: $\mathcal{L}(H)$ (cu norma sa uzuală) nu are bază Schauder dacă H este un spaţiu Hilbert separabil infinit dimensional. In Capitolul VI vom vedea că o problemă înrudită pentru operatori compacţi are, de asemenea, un răspuns negativ.

Capitolul VI

OPERATORI COMPACŢI. DESCOMPUNEREA SPECTRALĂ A OPERATORILOR AUTOADJUNCŢI COMPACŢI

VI.1 Definiţii. Proprietăţi elementare. Adjunct

Fie E şi F două spaţii Banach.

Definiţie. – Un operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se numeşte **compact** dacă $T(B_E)$ este relativ compactă în F pentru topologia tare. Notăm cu $\mathcal{K}(E, F)$ mulţimea operatorilor compacţi şi punem $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Teorema VI.1. – Mulţimea $\mathcal{K}(E, F)$ este un subspaţiu vectorial închis al lui $\mathcal{L}(E, F)$ (pentru topologia asociată normei $\| \ \|_{\mathcal{L}(E,F)}$).

Demonstraţie. – Este evident că suma a doi operatori compacţi este un operator compact. Presupunând că $(T_n) \in \mathcal{K}(E, F)$, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ şi $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$, să arătăm că T este compact. Deoarece F este complet, e suficient să verificăm că pentru orice $\varepsilon > 0$, $T(B_E)$ poate fi acoperită cu un număr finit de bile $B(f_i, \varepsilon)$ în F. Fixăm n astfel încât $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece $T_n(B_E)$ este relativ compact, $T_n(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B\left(f_i, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, cu I finită. Deci $T(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \varepsilon)$.

Definiţie. – Un operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se numeşte de **rang finit** dacă $R(T)$ este finit dimensional.

Este evident că un operator continuu de rang finit este compact.

Corolarul VI.2. – Fie (T_n) un şir de operatori continui de rang finit şi fie $T \in \mathcal{L}(E,F)$ astfel încât $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$. Atunci $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

$\star$ Remarca 1. – Celebra **"problemă a aproximării"** (Banach, Grothendieck) priveşte reciproca corolarului VI.2. Fiind dat un operator compact, există un şir (T_n) de operatori de rang finit astfel încât $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$?

In general, răspunsul este negativ (Enflo [1]) – chiar pentru anumite subspaţii închise ale lui ℓ^p $(1 < p < \infty,\ p \neq 2)$; vezi de exemplu Lindenstrauss-Tzafriri [2]. Totuşi răspunsul este afirmativ în numeroase cazuri; de exemplu, dacă F este un spaţiu Hilbert. Intr-adevăr, fie $K = \overline{T(B_E)}$. Fiind dat $\varepsilon > 0$, putem acoperi K cu un număr finit de bile de rază ε, să zicem $K \subset \bigcup\limits_{i \in I} B(f_i, \varepsilon)$, I finită. Fie G spaţiul vectorial generat de f_i şi $T_\varepsilon = P_G \circ T$ (T_ε este de rang finit). Afirmăm că $\|T_\varepsilon - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < 2\varepsilon$. Intr-adevăr, pentru orice $x \in B_E$ există $i_0 \in I$ astfel încât

$$\|Tx - f_{i_0}\| < \varepsilon. \tag{1}$$

Deci

$$\|P_G \circ Tx - P_G f_{i_0}\| < \varepsilon$$

adică

$$\|P_G \circ Tx - f_{i_0}\| < \varepsilon. \tag{2}$$

Combinând (1) şi (2) obţinem

$$\|P_G \circ Tx - Tx\| < 2\varepsilon \quad \forall x \in B_E,$$

adică

$$\|T_\varepsilon - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < 2\varepsilon.$$

[Se demonstrează cu uşurinţă că dacă F are o bază Schauder, atunci răspunsul rămâne afirmativ.]

Semnalăm o tehnică foarte utilă în analiza neliniară – care permite aproximarea unui operator continuu (liniar sau neliniar) prin aplicaţii **neliniare** de rang finit.

Fie X un spaţiu topologic, F un spaţiu Banach şi fie $T : X \to F$ o aplicaţie continuă astfel încât $T(X)$ este relativ compactă în F. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o aplicaţie continuă $T_\varepsilon : X \to F$ de rang finit astfel încât

$$\|T_\varepsilon(x) - T(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in X. \tag{3}$$

Intr-adevăr, mulţimea $K = \overline{T(X)}$ fiind compactă, putem acoperi K cu un număr finit de bile, $K \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \frac{\varepsilon}{2})$, cu I finită. Fie

$$T_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i \in I} q_i(x) f_i}{\sum_{i \in I} q_i(x)} \qquad \text{cu } q_i(x) = \operatorname{Max}\{\varepsilon - \|Tx - f_i\|, 0\};$$

evident, T_ε satisface (3).

Această metodă permite, între altele, să fie stabilită teorema de punct fix a lui Schauder pornind de la teorema de punct fix a lui Brouwer; vezi [EX]. Recent această tehnică a fost utilizată cu succes – şi de manieră surprinzătoare! – de către Lomonosov pentru a demonstra existenţa subspaţiilor invariante relativ la anumiţi operatori liniari, vezi Akhiezer-Glazman [1].

Propoziţia VI.3. – Fie E, F şi G trei spaţii Banach. Dacă $T \in \mathcal{L}(E, F)$ şi $S \in \mathcal{K}(F, G)$ [resp. $T \in \mathcal{K}(E, F)$ şi $S \in \mathcal{L}(F, G)$], atunci $S \circ T \in \mathcal{K}(E, G)$.

Demonstraţia este evidentă.

Teorema VI.4 (Schauder). – Dacă $T \in \mathcal{K}(E, F)$, atunci $T^* \in \mathcal{K}(F', E')$, şi reciproc.

Demonstraţie. – Arătăm că $T^*(B_{F'})$ este relativ compactă în E'. Fie (v_n) un şir în $B_{F'}$. Arătăm că $(T^*(v_n))$ conţine un subşir convergent. Fie $K = \overline{T(B_E)}$ (spaţiu metric compact) şi fie $\mathcal{H} \subset C(K)$ definit prin

$$\mathcal{H} = \{\varphi_n : x \in K \longmapsto \langle v_n, x\rangle; n = 1, 2, \dots\}.$$

Ipotezele teoremei lui Ascoli (teorema IV.24) sunt satisfăcute, deci putem extrage un subşir φ_{n_k} care converge uniform în $C(K)$ la o funcţie continuă $\varphi \in C(K)$. In particular,

$$\operatorname{Sup}_{u \in B_E} |\langle v_{n_k}, Tu\rangle - \varphi(Tu)| \to 0 \qquad \text{dacă } k \to \infty.$$

Deci

$$\mathrm{Sup}_{u\in B_E}|\langle v_{n_k}, Tu\rangle - \langle v_{n_\ell}, Tu\rangle| \to 0 \qquad \text{dacă } \; k,\ell \to \infty,$$

adică $\|T^*v_{n_k} - T^*v_{n_\ell}\|_{E'} \to 0$ dacă $k,\ell \to \infty$. In consecinţă, $T^*v_{n_k}$ converge în E'.

Reciproc, presupunem că $T^* \in \mathcal{K}(F', E')$. Ştim deja, din prima parte, că că $T^{**} \in \mathcal{K}(E'', F'')$. In particular, $T^{**}(B_E)$ este relativ compactă în F''. Dar $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ şi F este închis în F''. Deci $T(B_E)$ este relativ compactă în F.

Remarca 2. – Fie E şi F două spaţii Banach şi fie $T \in \mathcal{K}(E,F)$. Dacă (u_n) converge **slab** la u în E, atunci (Tu_n) converge **tare** la Tu; vezi [EX]. Reciproca este, de asemenea, adevărată, dacă E este reflexiv; vezi [EX].

VI.2 Teoria Riesz-Fredholm

Incepem cu câteva rezultate preliminare.

Lema VI.1 (Lema lui Riesz). – Fie E un spaţiu vectorial normat şi fie $M \subset E$ un subspaţiu vectorial închis astfel încât $M \neq E$. Atunci

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists u \in E \;\textbf{astfel încât}\; \|u\| = 1 \;\textbf{şi}\; \mathrm{dist}\,(u, M) \geq 1 - \varepsilon.$$

Demonstraţie. – Fie $v \in E$ cu $v \notin M$. Deoarece M este închis, $d = \mathrm{dist}(v, M) > 0$. Alegem $m_0 \in M$ astfel încât

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Atunci

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

satisface proprietăţile cerute. Intr-adevăr, pentru orice $m \in M$, avem

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| \geq \frac{d}{\|v - m_0\|} \geq 1 - \varepsilon$$

deoarece $m_0 + \|v - m_0\| m \in M$.

REMARCA 3. – Dacă M este finit dimensional (sau, mai general, dacă M este reflexiv) putem alege $\varepsilon = 0$ în lema VI.1; acest rezultat nu este valabil în general (vezi [EX]).

• **Teorema VI.5 (Riesz). – Fie E un spaţiu vectorial normat astfel încât B_E este compactă.**

Atunci E este finit dimensional.

DEMONSTRAŢIE. – Presupunem, prin reducere la absurd, că E este infinit dimensional. Atunci există un şir (E_n) de subspaţii finit dimensionale astfel încât $E_{n-1} \subset E_n$, $E_{n-1} \neq E_n$. Conform lemei VI.1, se poate construi un şir (u_n) cu $u_n \in E_n$ astfel încât $\|u_n\| = 1$ şi $\operatorname{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq 1/2$. In particular, $\|u_n - u_m\| \geq 1/2$ pentru $m < n$. Deci (u_n) nu are nici un subşir convergent, ceea ce contrazice ipoteza că "B_E este compactă".

• **Teorema VI.6 (Alternativa lui Fredholm). – Fie $T \in \mathcal{K}(E)$. Atunci**

a) $N(I - T)$ **este finit dimensional,**

b) $R(I - T)$ **este închis, şi, mai precis,** $R(I - T) = N(I - T^*)^{\perp}$

c) $N(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - T) = E$

d) $\dim N(I - T) = \dim N(I - T^*)$.

REMARCA 4. – Alternativa lui Fredholm este legată de rezolvarea ecuaţiei $u - Tu = f$. Acest rezultat afirmă că:

fie pentru orice $f \in E$ ecuaţia $u - Tu = f$ are soluţie unică,

fie ecuaţia omogenă $u - Tu = 0$ admite n soluţii liniar independente şi, în acest caz, ecuaţia neomogenă $u - Tu = f$ are soluţie dacă şi numai dacă f verifică n **condiţii de ortogonalitate**, adică $f \in N(I - T^*)^{\perp}$.

REMARCA 5. – Proprietatea *c*) este familiară în dimensiune finită. Dacă $\dim E < \infty$, atunci un operator liniar de la E în el însuşi este **injectiv** dacă şi numai dacă el este **surjectiv**. Totuşi **în dimensiune infinită un operator mărginit poate fi injectiv fără a fi surjectiv şi reciproc**; de exemplu **operatorul "shift" la dreapta (sau la stânga)** ([1]) în ℓ^2. Concluzia *c*) exprimă deci o proprietate remarcabilă a operatorilor de forma $I - T$ cu $T \in \mathcal{K}(E)$.

[1]Vezi Remarca 6 de mai jos.

DEMONSTRAŢIE.

a) Fie $E_1 = N(I - T)$. Atunci $B_{E_1} \subset T(B_E)$ şi deci B_{E_1} este compactă. Conform teoremei VI.5, E_1 este finit dimensional.

b) Fie $f_n = u_n - Tu_n \to f$. Trebuie demonstrat că $f \in R(I - T)$. Fie $d_n = \operatorname{dist}(u_n, N(I - T))$. Deoarece $N(I - T)$ este finit dimensional, există $v_n \in N(I - T)$ astfel încât $d_n = \|u_n - v_n\|$. Avem

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n). \tag{4}$$

Arătăm că $\|u_n - v_n\|$ rămâne mărginit. Raţionăm prin absurd şi presupunem că există un subşir astfel încât $\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \to \infty$. Punând $w_n = (u_n - v_n)/\|u_n - v_n\|$, am avea, cf. (4), $w_{n_k} - Tw_{n_k} \to 0$. Trecând la un alt subşir (notat tot cu w_{n_k}, pentru a simplifica), putem presupune că $Tw_{n_k} \to z$. Deci $w_{n_k} \to z$ şi $z \in N(I - T)$. Pe de altă parte,

$$\operatorname{dist}(w_n, N(I - T)) = \frac{\operatorname{dist}(u_n, N(I - T))}{\|u_n - v_n\|} = 1$$

(deoarece $v_n \in N(I - T)$). Prin trecere la limită obţinem $\operatorname{dist}(z, N(I - T)) = 1$, ceea ce este absurd. Deci $\|u_n - v_n\|$ rămâne mărginit şi cum T este un operator compact, putem extrage un subşir astfel încât $T(u_{n_k} - v_{n_k}) \to \ell$.

Din (4) rezultă că $u_{n_k} - v_{n_k} \to f + \ell$. Punând $g = f + \ell$, avem $g - Tg = f$, adică $f \in R(I - T)$. Am arătat aşadar că operatorul $(I - T)$ are imaginea închisă. Putem aplica deci teorema II.18 şi deducem că

$$R(I - T) = N(I - T^*)^{\perp}, \quad R(I - T^*) = N(I - T)^{\perp}.$$

c) Arătăm mai întâi implicaţia $\Rightarrow$. Presupunem, prin reducere la absurd, că

$$E_1 = R(I - T) \neq E.$$

E_1 este un spaţiu Banach şi $T(E_1) \subset E_1$. Deci $T_{|E_1} \in \mathcal{K}(E_1)$ şi $E_2 = (I - T)(E_1)$ este un subspaţiu închis al lui E_1. In plus, $E_2 \neq E_1$ (deoarece $(I - T)$ este injectiv). Fie $E_n = (I - T)^n(E)$. Obţinem astfel un şir strict descrescător de subspaţii închise. Conform lemei lui Riesz, există un şir (u_n) astfel încât $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ şi $\operatorname{dist}(u_n, E_{n+1}) \geq 1/2$. Avem

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m).$$

Observăm că dacă $n > m$, atunci $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$ şi deci

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in E_{m+1}.$$

Rezultă că $\|Tu_n - Tu_m\| \geq \operatorname{dist}(u_m, E_{m+1}) \geq 1/2$, ceea ce este absurd deoarece T este compact. Deci $R(I - T) = E$.

Reciproc, presupunem că $R(I - T) = E$. Din corolarul II.17, $N(I - T^*) = R(I - T)^\perp = \{0\}$. Deoarece $T^* \in \mathcal{K}(E')$, putem aplica situaţia precedentă pentru a deduce că $R(I - T^*) = E'$. Aplicând din nou corolarul II.17, deducem că $N(I - T) = R(I - T^*)^\perp = \{0\}$.

d) Fie $d = \dim N(I - T)$ şi $d^* = \dim N(I - T^*)$. Arătăm mai întâi că $d^* \leq d$. Prin absurd, presupunem că $d < d^*$. Cum $N(I - T)$ este de dimensiune finită, el admite un suplement topologic în E (vezi §II.4, exemplul 1); deci există un proiector continuu P de la E în $N(I - T)$.

Pe de altă parte, $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$ are codimensiune finită d^* şi deci $R(I - T)$ admite (în E) un suplement topologic, notat F, de dimensiune d^* (vezi §II.4, exemplul 2). Deoarece $d < d^*$, există o aplicaţie liniară $\Lambda : N(I - T) \to F$ care este **injectivă** şi **nu este surjectivă**. Fie $S = T + \Lambda \circ P$. Atunci $S \in \mathcal{K}(E)$ deoarece $\Lambda \circ P$ are rang finit.

Arătăm că $N(I - S) = \{0\}$. Intr-adevăr, dacă

$$0 = u - Su = (u - Tu) - (\Lambda \circ Pu),$$

atunci

$$u - Tu = 0 \quad \text{şi} \quad \Lambda \circ Pu = 0,$$

adică $u \in N(I - T)$ şi $\Lambda u = 0$. Deci $u = 0$.

Aplicând *c*) operatorului S obţinem că $R(I - S) = E$. Acest lucru este absurd deoarece există $f \in F$ cu $f \notin R(\Lambda)$ şi deci ecuaţia $u - Su = f$ nu are soluţie.

Am demonstrat aşadar că $d^* \leq d$. Aplicând acest rezultat lui T^* obţinem

$$\dim N(I - T^{**}) \leq \dim N(I - T^*) \leq \dim N(I - T).$$

Dar $N(I - T^{**}) \supset N(I - T)$ şi deci $d = d^*$.

VI.3 Spectrul unui operator compact

Definiţii. – Fie $T \in \mathcal{L}(E)$.

Mulţimea rezolvantă $\rho(T)$ se defineşte prin

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbf{R}; (T - \lambda I) \text{ este bijectiv de la } E \text{ în } E\}.$$

Spectrul $\sigma(T)$ este complementara mulţimii rezolvante, adică $\sigma(T) = \mathbf{R} \backslash \rho(T)$. Un număr λ se numeşte **valoare proprie** a lui T – şi se notează $\lambda \in EV(T)$ – dacă

$$N(T - \lambda I) \neq 0;$$

$N(T - \lambda I)$ se numeşte **spaţiul propriu** asociat lui λ.

Este important că dacă $\lambda \in \rho(T)$ atunci $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ (vezi corolarul II.6).

Remarca 6. – Este evident că $EV(T) \subset \sigma(T)$. In general, incluziunea este strictă: ([2]) este posibil să existe λ astfel încât

$$N(T - \lambda I) = \{0\} \text{ şi } R(T - \lambda I) \neq E$$

(un asemenea λ aparţine spectrului dar nu este valoare proprie). De exemplu, considerăm în $E = \ell^2$ operatorul **"shift"** la dreapta, adică $Tu = (0, u_1, u_2, \ldots)$ cu $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$. Atunci $0 \in \sigma(T)$, în timp ce $0 \notin EV(T)$.

Propoziţia VI.7. – Spectrul $\sigma(T)$ este o mulţime compactă şi

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|].$$

Demonstraţie. – Fie $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât $|\lambda| > \|T\|$. Vom arăta că $T - \lambda I$ este bijectiv, ceea ce implică $\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|]$. Fiind dat $f \in E$, ecuaţia $Tu - \lambda u = f$ admite soluţie unică deoarece ea se scrie sub forma $u = \lambda^{-1}(Tu - f)$ şi se poate aplica teorema de punct fix a lui Banach.

Arătăm acum că $\rho(T)$ este deschisă. Fie $\lambda_0 \in \rho(T)$. Fie $\lambda \in \mathbf{R}$ (apropiat de λ_0) şi $f \in E$. Incercăm să rezolvăm ecuaţia

$$Tu - \lambda u = f, \tag{5}$$

[2]Bineînţeles, cu excepţia cazului în care E este finit dimensional, atunci când $EV(T) = \sigma(T)$.

care poate fi scrisă sub forma

$$Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u,$$

adică

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0)u]. \tag{6}$$

Aplicând din nou teorema de punct fix a lui Banach deducem că (6) are soluţie unică şi

$$|\lambda - \lambda_0|\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1.$$

• **Teorema VI.8. – Fie** $T \in \mathcal{K}(E)$ **cu** $\dim E = \infty$**. Atunci avem**
a) $0 \in \sigma(T)$,
b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = EV(T) \setminus \{0\}$,
c) **una dintre situaţiile următoare:**
- fie $\sigma(T) = \{0\}$,
- fie $\sigma(T) \setminus \{0\}$ **este o mulţime finită,**
- fie $\sigma(T) \setminus \{0\}$ **este un şir care tinde la** 0.

Demonstraţie.

a) Presupunem prin reducere la absurd că $0 \notin \sigma(T)$. Atunci T este bijectiv şi $I = T \circ T^{-1}$ este compact. Deci B_E este compactă şi $\dim E < \infty$ (cf. teoremei VI.5), contradicţie.

b) Fie $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Vom arăta că λ este valoare proprie. Raţionăm prin absurd şi presupunem că $N(T - \lambda I) = \{0\}$. Atunci, conform teoremei VI.6 *c*), ştim că $R(T - \lambda I) = E$ şi deci $\lambda \in \rho(T)$, ceea ce este absurd.

Pentru a continua demonstraţia vom avea nevoie de

Lema VI.2. – Fie $T \in \mathcal{K}(E)$ **şi** $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ **un şir de numere reale distincte astfel încât**

$$\lambda_n \to \lambda$$

şi

$$\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\} \quad \forall n.$$

Atunci $\lambda = 0$.

Altfel zis, **toate punctele din** $\sigma(T) \setminus \{0\}$ **sunt izolate**.

DEMONSTRAŢIE. – Ştim că $\lambda_n \in EV(T)$; fie $e_n \neq 0$ astfel încât $(T - \lambda_n I)e_n = 0$. Fie E_n spaţiul vectorial generat de $[e_1, e_2, \ldots, e_n]$. Arătăm că $E_n \subset E_{n+1}$, $E_n \neq E_{n+1}$, pentru orice n. Este suficient să arătăm că, pentru orice n, vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sunt liniar independenţi. Raţionăm prin inducţie în raport cu n şi presupunem că $e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Atunci

$$Te_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{n+1} e_i.$$

Rezultă că $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ şi deci $\alpha_i = 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, contradicţie. Rezultă că $E_n \subset E_{n+1}$, $E_n \neq E_{n+1}$, pentru orice n.

Pe de altă parte, este evident că $(T - \lambda_n I)E_n \subset E_{n-1}$. Aplicând lema lui Riesz construim un şir $(u_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ şi $\operatorname{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq 1/2$ pentru orice $n \geq 2$. Pentru orice $2 \leq m < n$ avem

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n.$$

Avem

$$\begin{aligned}\left\|\tfrac{Tu_n}{\lambda_n} - \tfrac{Tu_m}{\lambda_m}\right\| &= \left\|\tfrac{(Tu_n - \lambda_n u_n)}{\lambda_n} - \tfrac{(Tu_m - \lambda_m u_m)}{\lambda_m} + u_n - u_m\right\| \\ &\geq \operatorname{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dacă $\lambda_n \to \lambda$ şi $\lambda \neq 0$ ajungem la o contradicţie deoarece (Tu_n) conţine un subşir convergent.

DEMONSTRAŢIA TEOREMEI VI.8. *c*). – Pentru orice întreg $n \geq 1$ mulţimea

$$\sigma(T) \cap \left\{\lambda \in \mathbf{R}\,;\, |\lambda| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

este **vidă** sau **finită** (dacă ar conţine o infinitate de puncte distincte, ar avea şi un punct de acumulare – deoarece $\sigma(T)$ este compact – şi aceasta ar contrazice lema VI.2). Aşadar, dacă $\sigma(T) \setminus \{0\}$ conţine o infinitate de puncte distincte, le putem aranja să formeze un şir care tinde către 0.

REMARCA 7. – Fiind dat un şir (α_n) care tinde la 0, putem construi un operator T astfel încât $\sigma(T) = (\alpha_n) \cup \{0\}$. Este suficient să considerăm în $E = \ell^2$ operatorul de multiplicare T definit prin $Tu = (\alpha_1 u_1,$

$\alpha_2 u_2, \ldots, \alpha_n u_n, \ldots)$, unde $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$. Observăm că T este compact deoarece T este limita unui şir de operatori de rang finit. Mai precis, fie $T_n u = (\alpha_1 u_1, \alpha_2 u_2, \ldots, \alpha_n u_n, 0, 0, \ldots)$. Atunci $\|T_n - T\| \to 0$. In acest exemplu vedem de asemenea că 0 poate sau nu să aparţină lui $EV(T)$. In plus, dacă $0 \in EV(T)$, este posibil ca spaţiul propriu asociat, $N(T)$, să fie infinit dimensional.

VI.4 Descompunerea spectrală a operatorilor autoadjuncţi compacţi

Presupunem în cele ce urmează că $E = H$ este un spaţiu Hilbert şi că $T \in \mathcal{L}(H)$. Identificând H' şi H, putem presupune că $T^* \in \mathcal{L}(H)$.

Definiţie. – Spunem că un operator $T \in \mathcal{L}(H)$ este **autoadjunct** dacă $T^* = T$, adică

$$\boxed{(Tu, v) = (u, Tv) \qquad \forall u, v \in H.}$$

Propoziţia VI.9. - Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator autoadjunct. Definim

$$m = \operatorname{Inf}_{\substack{u \in H \\ |u|=1}} (Tu, u) \text{ şi } M = \operatorname{Sup}_{\substack{u \in H \\ |u|=1}} (Tu, u).$$

Atunci $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ şi $M \in \sigma(T)$.

Demonstraţie. – Fie $\lambda > M$; demonstrăm că $\lambda \in \rho(T)$. Avem

$$(Tu, u) \leq M|u|^2 \quad \forall u \in H,$$

şi deci

$$(\lambda u - Tu, u) \geq (\lambda - M)|u|^2 = \alpha|u|^2 \qquad \forall u \in H, \text{ cu } \alpha > 0.$$

Aplicând teorema lui Lax-Milgram deducem că $\lambda I - T$ este bijectiv.

Arătăm acum că $M \in \sigma(T)$. Forma $a(u, v) = (Mu - Tu, v)$ este biliniară, simetrică şi

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H.$$

Aplicând inegalitatea lui Cauchy-Schwarz obţinem

$$|a(u, v)| \leq a(u, u)^{1/2} a(v, v)^{1/2} \quad \forall u,\ v \in H,$$

adică

$$|(Mu - Tu, v)| \leq (Mu - Tu, u)^{1/2}(Mv - Tv, v)^{1/2} \quad \forall u,\, v \in H.$$

De aici rezultă, în particular, că

$$(7) \qquad |Mu - Tu| \leq C(Mu - Tu, u)^{1/2} \quad \forall u \in H.$$

Fie (u_n) un şir astfel încât $|u_n| = 1$ şi $(Tu_n, u_n) \to M$. Din (7) deducem că $|Mu_n - Tu_n| \to 0$ şi deci $M \in \sigma(T)$ (căci dacă $M \in \rho(T)$, atunci $u_n = (M\ I - T)^{-1}(Mu_n - Tu_n) \to 0$, ceea ce este imposibil).

Proprietăţile lui m se obţin înlocuind T cu $-T$.

Corolarul VI.10. – Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator autoadjunct astfel încât $\sigma(T) = \{0\}$. Atunci $T = 0$.

Demonstraţie. – Din propoziţia VI.9 deducem că

$$(Tu, u) = 0 \quad \forall u \in H.$$

Rezultă că

$$2(Tu, v) = (T(u + v), u + v) - (Tu, u) - (Tv, v) = 0 \qquad \forall u, v \in H.$$

Deci $T = 0$.

Rezultatul următor este **fundamental**. El arată că un operator autoadjunct compact este **diagonalizabil** într-o bază convenabil aleasă.

• **Teorema VI.11. – Fie H un spaţiu Hilbert separabil şi T un operator autoadjunct compact.**

Atunci H admite o bază Hilbertiană formată din vectori proprii ai lui T.

Demonstraţie. – Fie $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ şirul vectorilor proprii distincţi ai lui T, cu excepţia lui 0; notăm $\lambda_0 = 0$.

Fie $E_0 = N(T)$ şi $E_n = N(T - \lambda_n I)$. Reamintim că

$$0 \leq \dim E_0 \leq \infty \text{ şi că } 0 < \dim E_n < \infty.$$

Arătăm mai întâi că H este suma Hilbertiană a spaţiilor E_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$:

(i) Spaţiile $(E_n)_{n\geq 0}$ sunt două câte două ortogonale. Intr-adevăr, dacă $u \in E_m$ şi $v \in E_n$ cu $m \neq n$, atunci

$$Tu = \lambda_m u \quad \text{şi} \quad Tv = \lambda_n v$$

şi

$$(Tu, v) = \lambda_m(u, v) = (u, Tv) = \lambda_n(u, v).$$

Deci

$$(u, v) = 0.$$

(ii) Fie F spaţiul vectorial generat de $(E_n)_{n\geq 0}$. Verificăm că F este dens în H.

Este evident că $T(F) \subset F$. Rezultă că $T(F^\perp) \subset F^\perp$. Intr-adevăr, dacă $u \in F^\perp$ şi $v \in F$ atunci $(Tu, v) = (u, Tv) = 0$. Fie T_0 operatorul T restricţionat la $F^\perp$. Atunci T_0 este un operator autoadjunct compact. Pe de altă parte, $\sigma(T_0) = \{0\}$. Intr-adevăr, dacă

$$\lambda \in \sigma(T_0) \setminus \{0\}, \qquad \text{atunci} \qquad \lambda \in EV(T_0),$$

deci există $u \in F^\perp$, $u \neq 0$, astfel încât $T_0 u = \lambda u$. Prin urmare, λ este una dintre valorile proprii ale lui T, să zicem $\lambda = \lambda_n$ şi $u \in E_n \cap F^\perp$. Deci $u = 0$, contradicţie.

Rezultă din corolarul VI.10 că $T_0 = 0$. Rezultă că

$$F^\perp \subset N(T) \subset F \quad \text{şi} \quad F^\perp = \{0\}.$$

Deci F este dens în H.

In final, alegem în fiecare spaţiu $(E_n)_{n\geq 0}$ câte o bază Hilbertiană. Reuniunea acestor baze este o bază Hilbertiană a lui H formată din vectori proprii ai lui T.

Remarca 8. – Fie T un operator autoadjunct compact. Din cele de mai sus rezultă că putem scrie orice $u \in H$ sub forma

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{cu } u_n \in E_n.$$

Atunci $Tu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$. Fie

$$T_k u = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n u_n.$$

Evident, T_k este un operator de rang finit şi

$$\|T_k - T\| \leq \mathrm{Sup}_{n\geq k+1}|\lambda_n| \to 0 \quad \text{dacă } k \to \infty.$$

Regăsim astfel faptul că T este limita unui şir (T_k) de operatori de rang finit. Reamintim că într-un spaţiu Hilbert **orice** operator compact – **nu necesar autoadjunct** – este limita unui şir de operatori de rang finit (vezi remarca 1).

VI.5 Comentarii asupra capitolului VI

$\star$ **1) Operatori Fredholm**.

Teorema VI.6 este un prim pas către teoria operatorilor Fredholm. Fie E şi F două spaţii Banach. Spunem că un operator $A \in \mathcal{L}(E, F)$ este un **operator Fredholm** ([3]) – vom scrie $A \in$ Fred(E, F) – dacă

(i) $N(A)$ este finit dimensional.

(ii) $R(A)$ este închis şi de codimensiune finită ([4]).

Indexul lui A se defineşte prin

$$\mathrm{Ind}\, A = \dim N(A) - \mathrm{codim}\, R(A).$$

De exemplu, $A = I - T$ cu $T \in \mathcal{K}(E)$ este un operator Fredholm de index 0 (vezi teorema VI.6).

Proprietăţile principale ale operatorilor Fredholm sunt următoarele:

a) Mulţimea Fred$(E,\ F)$ este deschisă în $\mathcal{L}(E, F)$ şi aplicaţia $A \mapsto \mathrm{Ind}\, A$ este continuă; deci ea este constantă pe fiecare componentă conexă a lui Fred(E, F).

b) Orice operator $A \in$ Fred(E, F) este inversabil modulo operatorii de rang finit, adică există un operator $B \in \mathcal{L}(F, E)$ astfel încât

$$(A \circ B - I_F) \text{ şi } (B \circ A - I_E) \text{ sunt operatori de rang finit.}$$

Reciproc, fie $A \in \mathcal{L}(E, F)$ şi presupunem că există $B \in \mathcal{L}(F, E)$ astfel încât

$$A \circ B - I_F \in \mathcal{K}(F) \text{ şi } B \circ A - I_E \in \mathcal{K}(E).$$

[3]Spunem de asemenea că A este un **operator cu indice.**

[4]Se arată că dacă $A \in \mathcal{L}(E, F)$ este astfel încât $N(A)$ are dimensiune finită şi $R(A)$ are codimensiune finită (adică $R(A)$ admite un suplement **algebric** de dimensiune finită) atunci $R(A)$ este închis; vezi [EX].

Atunci $A \in \text{Fred}\,(E, F)$.

c) Dacă $A \in \text{Fred}(E, F)$ şi $T \in \mathcal{K}(E, F)$ atunci $A + T \in \text{Fred}\,(E, F)$ şi $\text{Ind}\,(A + T) = \text{Ind}\, A$.

d) Dacă $A \in \text{Fred}\,(E, F)$ şi $F \in \text{Fred}\,(F, G)$ atunci $B \circ A \in \text{Fred}\,(E, G)$ şi $\text{Ind}\,(B \circ A) = \text{Ind}\, A + \text{Ind}\, B$.

In legătură cu aceste probleme vezi Kato [1], Schechter [1], Lang [1] sau [EX].

⋆ 2) Operatori Hilbert-Schmidt

Fie H un spaţiu Hilbert separabil. Un operator $T \in \mathcal{L}(H)$ se numeşte **operator Hilbert-Schmidt** dacă există o bază Hilbertiană (e_n) a lui H astfel încât $\|T\|_{HS}^2 = \sum |Te_n|^2 < \infty$. Se poate verifica faptul că această definiţie este independentă de alegerea bazei şi că $\| \ \|_{HS}$ este o normă. In plus, T este compact. Operatorii Hilbert-Schmidt constituie un subspaţiu important al lui $\mathcal{K}(H)$ – în particular din cauza rezultatului următor.

Teorema VI.12. – Fie $H = L^2(\Omega)$ şi $K(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Atunci operatorul

$$u \mapsto (Ku)(x) = \int_\Omega K(x, y)u(y)\, dy$$

este un operator Hilbert-Schmidt.

Reciproc, orice operator Hilbert-Schmidt pe $L^2(\Omega)$ se reprezintă în mod unic cu ajutorul unei funcţii $K(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$.

Asupra acestei chestiuni, vezi Balakrishnan [1], Dunford-Schwartz [1], Volumul 2, L. Schwartz [3] sau [EX].

3) Multiplicitatea valorilor proprii

Fie $T \in \mathcal{K}(E)$ şi $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Se arată că şirul $N((T - \lambda I)^k)$, $k = 1, 2, \ldots$ este strict crescător până la un anumit rang finit p, după care el devine stabil (vezi Dieudonné [1], Kreyszig [1] sau [EX]). Se spune că p este **ordinul** lui λ. Dimensiunea lui $N(T - \lambda I)$ se numeşte **multiplicitate geometrică** a lui λ, iar dimensiunea lui $N((T - \lambda I)^p)$ se numeşte **multiplicitate algebrică** a lui λ; ele coincid dacă E este un spaţiu Hilbert şi T este autoadjunct (vezi [EX]).

4) Analiză spectrală

Fie H un spaţiu Hilbert. Fie T un operator autoadjunct (sau, mai general, **normal** adică $T^*T = TT^*$) necompact şi chiar, eventual **nemărginit**. **Descompunerea spectrală** este o tehnică care generalizează descompunerea spectrală din §VI.4. Ea permite, între altele, să se definească un calcul funcţional, adică să se dea un sens lui $f(T)$ pentru orice funcţie continuă f. **Analiza spectrală** este un subiect foarte vast, care are numeroase aplicaţii şi ramificaţii. Pentru o expunere elementară vezi Rudin [1], Kreyszig [1], Friedman [3], Yosida [1], Huet [1]. Pentru o prezentare mai completă vezi Reed-Simon [1], Kato [1], Dunford-Schwartz [1], volumul 2, Akhiezer-Glazman [1], Taylor-Lay [1] şi Schechter [2].

5) Principiul Min-Max

Formulele **min-max ale lui Courant-Fischer** furnizează o caracterizare utilă a valorilor proprii ale unui operator autoadjunct compact; vezi Courant-Hilbert [1], Raviart-Thomas [1] sau [EX]. Lucrarea lui Weinberger [2] conţine numeroase dezvoltări pe marginea acestui subiect.

6) Teorema lui Krein-Rutman

Următorul rezultat are aplicaţii interesante în studiul spectral al operatorilor eliptici de ordinul al doilea (vezi capitolul IX).

$\star$ **Teorema VI.13 (Krein-Rutman). – Fie E un spaţiu Banach şi C un con convex cu vârful în 0 (adică $\lambda x + \mu y \in C$, $\forall \lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $x \in C$, $y \in C$). Presupunem că C este închis, $\operatorname{Int} C \neq \emptyset$ şi $C \cap (-C) = \{0\}$. Fie $T \in \mathcal{K}(E)$ astfel încât $T(C \setminus \{0\}) \subset \operatorname{Int} C$. Atunci există $u \in \operatorname{Int} C$ şi $\lambda > 0$ astfel încât $Tu = \lambda u$; mai mult, λ este unica valoare proprie asociată unui vector propriu al lui T în C (adică $Tv = \mu v$ cu $v \in C$ şi $v \neq 0$ implică $\mu = \lambda$). In sfârşit,**

$$\lambda = \operatorname{Max}\{|\mu|;\ \mu \in \sigma(T)\}$$

şi multiplicitatea (geometrică şi algebrică) a lui λ este egală cu 1.

Vezi Schaefer [1] şi [EX].

Capitolul VII

TEOREMA LUI HILLE-YOSIDA

VII.1 Definiţia şi proprietăţile elementare ale operatorilor maximal monotoni

Pretutindeni în acest capitol, H notează un spaţiu Hilbert.

Definiţie. – Un operator liniar nemărginit $A : D(A) \subset H \to H$ se spune că este **monoton** ([1]) dacă satisface

$$(Av, v) \geq 0 \quad \forall v \in D(A).$$

Acesta este numit **maximal monoton** dacă, în plus, $R(I + A) = H$, adică

$$\forall f \in H \;\; \exists u \in D(A) \quad \text{astfel încât} \;\; u + Au = f.$$

Propoziţia VII.1. – Fie A un operator maximal monoton. Atunci

a) $D(A)$ **este dens în** H**.**

b) A **este un operator închis.**

c) **Pentru orice** $\lambda > 0$**,** $(I + \lambda A)$ **este bijectiv de la** $D(A)$ **la** H**,** $(I + \lambda A)^{-1}$ **este un operator mărginit şi** $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$**.**

DEMONSTRAŢIE.

a) Fie $f \in H$ astfel încât $(f, v) = 0, \quad \forall v \in D(A)$. Afirmăm că $f = 0$. Intr-adevăr, există un anume $v_0 \in D(A)$ astfel încât $v_0 + Av_0 = f$. Avem

$$0 = (f, v_0) = |v_0|^2 + (Av_0, v_0) \geq |v_0|^2.$$

[1] Unii autori spun că A este **acretiv** sau că $-A$ este **disipativ**.

Astfel $v_0 = 0$ şi de aici $f = 0$.

b) Intâi observăm că pentru orice $f \in H$ există $u \in D(A)$ **unic** astfel încât $u + Au = f$. Intr-adevăr, dacă $\overline{u}$ este o altă soluţie avem

$$u - \overline{u} + A(u - \overline{u}) = 0.$$

Luând produsul scalar cu $(u - \overline{u})$ şi utilizând monotonia lui A vedem că $u - \overline{u} = 0$. Apoi, subliniem că $|u| \leq |f|$ deoarece $|u|^2 + (Au, u) = (f, u) \geq |u|^2$. De aceea aplicaţia $f \mapsto u$, notată prin $(I + A)^{-1}$, este un operator liniar mărginit de la H în el însuşi şi $\|(I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. Demonstrăm acum că A este un operator închis. Fie (u_n) un şir din $D(A)$ astfel încât $u_n \to u$ şi $Au_n \to f$. Trebuie să verificăm că $u \in D(A)$ şi $Au = f$. Insă, $u_n + Au_n \to u + f$ şi astfel

$$u_n = (I + A)^{-1}(u_n + Au_n) \to (I + A)^{-1}(u + f).$$

De aici $u = (I + A)^{-1}(u + f)$, adică $u \in D(A)$ şi $u + Au = u + f$.

c) Vom arăta că dacă $R(I + \lambda_0 A) = H$ pentru un anume $\lambda_0 > 0$ atunci $R(I + \lambda A) = H$ pentru orice $\lambda > \lambda_0/2$. Punctăm întâi – ca în partea *b*) – că pentru orice $f \in H$ există un unic $u \in D(A)$ astfel încât $u + \lambda_0 Au = f$. Mai mult, aplicaţia $f \mapsto u$, notată prin $(I + \lambda_0 A)^{-1}$, este un operator liniar, mărginit cu $\|(I + \lambda_0 A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. Incercăm să rezolvăm ecuaţia

$$u + \lambda A u = f \quad \text{cu } \lambda > 0. \tag{1}$$

Ecuaţia (1) poate fi scrisă astfel

$$u + \lambda_0 A u = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u$$

ori in forma

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u\right]. \tag{2}$$

Dacă $\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$, adică $\lambda > \lambda_0/2$, putem aplica Principiul Contracţiei (Teorema V.7) şi deduce că (2) are o soluţie.

Concluzia lui c) urmează uşor prin inducţie: deoarece $I + A$ este surjectiv, $I + \lambda A$ este surjectiv pentru orice $\lambda > 1/2$, şi astfel pentru orice $\lambda > 1/4$, etc.

REMARCA 1. – Dacă A este maximal monoton atunci λA este, de asemenea, maximal monoton pentru orice $\lambda > 0$. Totuşi, dacă A şi B sunt operatori maximal monotoni, atunci $A+B$, definit pe $D(A)\cap D(B)$, nu este necesar să fie maximal monoton (vezi [EX]).

Definiţii. – Fie A un operator maximal monoton. Pentru orice $\lambda > 0$ definim

$$\boxed{J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad \text{şi} \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).}$$

J_λ este numită **rezolvanta** lui A şi A_λ este **regularizata Yosida** a lui A. Reţinem că $\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Propoziţia VII.2. – Fie A un operator maximal monoton. Atunci

a_1) $\quad A_\lambda v = A(J_\lambda v) \qquad \forall v \in H$ **şi** $\forall \lambda > 0$,

a_2) $\quad A_\lambda v = J_\lambda(Av) \qquad \forall v \in D(A)$ **şi** $\forall \lambda > 0$,

b) $\quad |A_\lambda v| \leq |Av| \qquad \forall v \in D(A)$ **şi** $\forall \lambda > 0$,

c) $\quad \lim_{\lambda\to 0} J_\lambda v = v \qquad \forall v \in H$,

d) $\quad \lim_{\lambda\to 0} A_\lambda v = Av \qquad \forall v \in D(A)$,

e) $\quad (A_\lambda v, v) \geq 0 \qquad \forall v \in H$ **şi** $\forall \lambda > 0$,

f) $\quad |A_\lambda v| \leq (1/\lambda)|v| \qquad \forall v \in H$ **şi** $\forall \lambda > 0$.

DEMONSTRAŢIE. –

a_1) poate fi scrisă ca $v = (J_\lambda v) + \lambda A(J_\lambda v)$ – care este tocmai definiţia lui $J_\lambda v$.

a_2) Din a_1) avem

$$A_\lambda v + A(v - J_\lambda v) = Av,$$

adică

$$A_\lambda v + \lambda A(A_\lambda v) = Av$$

care înseamnă că $A_\lambda v = (I + \lambda A)^{-1} Av$.

b) Urmează uşor din a_2).

c) Presupunem întâi că $v \in D(A)$. Atunci

$$|v - J_\lambda v| = \lambda |A_\lambda v| \leq \lambda |Av| \text{ din } b)$$

şi astfel $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v$.

Presupunem acum că v este un element general din H. Pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, există un anume $v_1 \in D(A)$ astfel încât $|v - v_1| \leq \varepsilon$ (deoarece $D(A)$ este dens în H din propoziţia VII.1). Avem

$$\begin{aligned} |J_\lambda v - v| &\leq |J_\lambda v - J_\lambda v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| + |v_1 - v| \\ &\leq 2|v - v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| \leq 2\varepsilon + |J_\lambda v_1 - v_1|. \end{aligned}$$

Astfel

$$\limsup_{\lambda \to 0} |J_\lambda v - v| \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

şi deci

$$\lim_{\lambda \to 0} |J_\lambda v - v| = 0.$$

d) Este o consecinţă a lui a_2) şi *c*).

e) Avem

$$(A_\lambda v, v) = (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) = \lambda |A_\lambda v|^2 + (A(J_\lambda v), J_\lambda v)$$

şi astfel

$$(A_\lambda v, v) \geq \lambda |A_\lambda v|^2. \tag{3}$$

f) Este o consecinţă a lui (3) şi a inegalităţii lui Cauchy-Schwarz.

Remarca 2. – Propoziţia VII.2 implică că $(A_\lambda)_{\lambda > 0}$ este o familie de operatori **mărginiţi** care “aproximează” operatorul **nemărginit** A când $\lambda \to 0$. Această aproximaţie va fi utilizată foarte des. Desigur, în general, $\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)}$ “explodează” când $\lambda \to 0$.

VII.2 Soluţia problemei de evoluţie

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{pe } [0,+\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Existenţă şi unicitate.

Incepem cu un rezultat clasic:

• **Teorema VII.3 (Cauchy, Lipschitz, Picard).** – **Fie E un spaţiu Banach şi $F : E \to E$ o aplicaţie Lipschitziană, adică există o constantă L astfel încât**

$$\|Fu - Fv\| \le L\|u - v\| \quad \forall u, v \in E.$$

Atunci, pentru orice $u_0 \in E$ dat există o soluţie unică $u \in C^1([0,+\infty); E)$ a problemei:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Fu(t) \quad \textbf{pe } [0,+\infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4}$$

(u_0 este numită data iniţială).

Demonstraţie. –

Existenţa. A rezolva (4) echivalează cu a găsi un anume $u \in C([0,+\infty); E)$ satisfăcând ecuaţia integrală

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\,ds. \tag{5}$$

Pentru $k > 0$ dat – ce va fi fixat mai târziu – definim

$$X = \left\{ u \in C([0,+\infty); E);\ \operatorname{Sup}_{t\ge 0} e^{-kt}\|u(t)\| < \infty \right\}.$$

Este uşor de verificat că X este un spaţiu Banach în raport cu norma

$$\|u\|_X = \operatorname{Sup}_{t\ge 0} e^{-kt}\|u(t)\|.$$

Pentru orice $u \in X$, funcţia Φu definită de

$$(\Phi u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\,ds$$

aparţine, de asemenea, lui X. Mai mult, avem

$$\|\Phi u - \Phi v\|_X \leq \frac{L}{k}\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Luând arbitrar $k > L$ găsim că Φ are un punct fix (unic) u în X, care este o soluţie a lui (5).

Unicitatea. Fie u şi $\overline{u}$ două soluţii ale lui (4) şi definim

$$\varphi(t) = \|u(t) - \overline{u}(t)\|.$$

Din (5) deducem că

$$\varphi(t) \leq L\int_0^t \varphi(s)\,ds \quad \forall t \geq 0$$

şi, în consecinţă, $\varphi \equiv 0$.

Teorema precedentă este extrem de utilă în studiul **ecuaţiilor diferenţiale ordinare**. Totuşi este de puţin folos în studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale. Următorul nostru rezultat este un **instrument foarte puternic** în rezolvarea **ecuaţiilor cu derivate parţiale de evoluţie** – vezi capitolul X.

• Teorema VII.4 (Hille-Yosida). – Fie A un operator maximal monoton. Atunci, pentru orice $u_0 \in D(A)$ dat, există o funcţie unică ([2])

$$u \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty); D(A))$$

satisfăcând

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \textbf{pe } [0, +\infty) \\ u(0) = u_0 \quad \textbf{(data iniţială)}. \end{cases}$$

Mai mult

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \textbf{şi} \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

[2] Spaţiul $D(A)$ este înzestrat cu **norma grafului** $|v| + |Av|$ sau cu norma Hilbert echivalentă $(|v|^2 + |Av|^2)^{1/2}$.

Remarca 3. – Avantajul principal al teoremei VII.4 constă în faptul că reducem studiul unei "**probleme de evoluţie**" la studiul unei "**ecuaţii staţionare**" $u + \lambda Au = f$ (presupunând a şti deja că A este monoton – ceea ce este uşor de verificat în practică).

Demonstraţie. – Aceasta este împărţită în 6 etape.

Etapa 1: Unicitatea. – Fie u şi $\overline{u}$ două soluţii ale lui (6). Avem

$$\left(\frac{d}{dt}(u-\overline{u}),(u-\overline{u})\right) = -\left(A(u-\overline{u}),u-\overline{u}\right) \leq 0.$$

Dar ([3])

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-\overline{u}(t)|^2 = \left(\frac{d}{dt}(u(t)-\overline{u}(t)),\, u(t)-\overline{u}(t)\right).$$

Astfel, funcţia $t \mapsto |u(t) - \overline{u}(t)|$ este monoton descrescătoare pe $[0, +\infty)$. Din $|u(0) - \overline{u}(0)| = 0$ urmează că

$$|u(t) - \overline{u}(t)| = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Ideea principală pentru demonstrarea **existenţei** este de a înlocui în (6) operatorul A prin A_λ, a aplica teorema VII.3 problemei aproximante şi apoi de a trece la limită când $\lambda \to 0$ utilizând diverse **estimări care sunt independente de** λ. Deci, fie u_λ soluţia problemei

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \quad \text{pe } [0,+\infty) \\ u_\lambda(0) = u_0 \in D(A). \end{cases}$$

Etapa 2: – Avem estimarea

$$(8) \qquad \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \lambda > 0.$$

Această inegalitate este o consecinţă imediată a următorului rezultat.

[3]Reţineţi că dacă $\varphi \in C^1([0,+\infty);H)$, atunci $|\varphi|^2 \in C^1([0,+\infty);\mathbf{R})$ şi $\dfrac{d}{dt}|\varphi|^2 = 2\left(\dfrac{d\varphi}{dt},\varphi\right)$.

Lema VII.1. – Fie $w \in C^1([0, +\infty); H)$ **o funcţie satisfăcând**

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w = 0 \quad \textbf{pe } [0, +\infty). \tag{9}$$

Atunci funcţiile $t \mapsto |w(t)|$ **şi** $t \mapsto \left|\frac{dw}{dt}(t)\right| = |A_\lambda w(t)|$ **sunt monoton descrescătoare pe** $[0, +\infty)$**.**

Demonstraţie. – Avem

$$\left(\frac{dw}{dt},\ w\right) + (A_\lambda w, w) = 0.$$

Din propoziţia VII.2 e) ştim că $(A_\lambda w, w) \geq 0$ şi, de aceea, $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 \leq 0$, astfel încât $|w(t)|$ este monoton descrescătoare. Pe de altă parte, deoarece A_λ este un operator liniar mărginit, deducem (prin inducţie) din (10) că $w \in C^\infty([0, +\infty);\ H)$ şi, de asemenea, că

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dt}\right) + A_\lambda\left(\frac{dw}{dt}\right) = 0.$$

Se aplică deci rezultatul precedent lui $\frac{dw}{dt}$.

Etapa 3: – Vom demonstra aici că, pentru orice $t \geq 0$, $u_\lambda(t)$ converge, când $\lambda \to 0$, la o anumită limită notată prin $u(t)$. Mai mult, convergenţa este uniformă pe orice interval mărginit $[0, T]$.

Pentru orice λ, $\mu > 0$ avem

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

şi astfel

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 + (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t),\ u_\lambda(t) - u_\mu(t)) = 0. \tag{10}$$

Renunţând la t pentru simplitate, scriem

$$(11)\quad \begin{cases} (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) \\ \quad = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu) \\ \quad = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + \\ \quad +(A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\ \quad \geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu). \end{cases}$$

Din (8), (10) şi (11) urmează că

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu)|Au_0|^2.$$

Integrând această inegalitate, obţinem

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 \leq 4(\lambda + \mu)t|Au_0|^2$$

adică

$$(12)\qquad |u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)t}|Au_0|.$$

Urmează că, pentru orice $t \geq 0$ fixat, $(u_\lambda(t))$ este un şir Cauchy când $\lambda \to 0$ şi de aceea converge la o limită notată $u(t)$. Trecând la limită în (12) cu $\mu \to 0$ avem

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq 2\sqrt{\lambda t}|Au_0|.$$

Astfel, convergenţa este uniformă în t pe orice interval mărginit $[0, T]$ şi deci $u \in C([0, +\infty); H)$.

Etapa 4: – Presupunând, în plus, că $u_0 \in D(A^2)$, adică $u_0 \in D(A)$ şi $Au_0 \in D(A)$, demonstrăm aici că $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge, când $\lambda \to 0$, la o anumită limită şi că această convergenţă este uniformă pe fiecare interval mărginit $[0, T]$.

Definim $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$, aşa încât $\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$. Urmând acelaşi raţionament ca în Etapa 3 vedem că

$$(13)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq (|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|)(\lambda|A_\lambda v_\lambda| + \mu|A_\mu v_\mu|).$$

Din lema VII.1 avem

$$|A_\lambda v_\lambda(t)| \leq |A_\lambda v_\lambda(0)| = |A_\lambda A_\lambda u_0| \tag{14}$$

şi, în mod similar,

$$|A_\mu v_\mu(t)| \leq |A_\mu v_\mu(0)| = |A_\mu A_\mu u_0|. \tag{15}$$

In final, deoarece $Au_0 \in D(A)$, obţinem

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0$$

şi astfel

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leq |A^2 u_0|, \quad |A_\mu A_\mu u_0| \leq |A^2 u_0|. \tag{16}$$

Combinând (13), (14), (15) şi (16) suntem conduşi la

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu)|A^2 u_0|^2.$$

Concluzionăm, ca în Etapa 3, că $v_\lambda(t) = \dfrac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge, când $\lambda \to 0$, la o anumită limită, convergenţa fiind uniformă pe fiecare interval mărginit $[0, T]$.

Etapa 5: – Presupunând că $u_0 \in D(A^2)$ arătăm aici că u este o soluţie a lui (6).

Din cele de mai sus ştim că, pentru orice $T < \infty$:

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \to u(t), & \text{când } \lambda \to 0, \quad \text{uniform pe } [0, T] \\ \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) \quad \text{converge}, & \text{când } \lambda \to 0, \quad \text{uniform pe } [0, T]. \end{cases}$$

Urmează uşor că $u \in C^1([0, +\infty);\ H)$ şi că $\dfrac{du_\lambda}{dt}(t) \to \dfrac{du}{dt}(t)$, când $\lambda \to 0$, uniform pe $[0, T]$. Rescriem (7) astfel

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0. \tag{17}$$

Subliniem că $J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t)$ când $\lambda \to 0$ deoarece

$$\begin{aligned} |J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| &\leq |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \to 0. \end{aligned}$$

Aplicând faptul că A are graficul închis, deducem din (17) că $u(t) \in D(A) \quad \forall t \geq 0$ şi că

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0.$$

In final, deoarece $u \in C^1([0, +\infty); H)$, funcţia $t \mapsto Au(t)$ este continuă de la $[0, +\infty)$ la H şi, de aceea, $u \in C([0, +\infty); D(A))$. Astfel am obţinut o soluţie a lui (6) satisfăcând în plus

$$|u(t)| \leq |u_0|, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{şi} \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

Etapa 6: – Incheiem aici demonstraţia teoremei.

Vom utiliza următoarea:

Lema VII.2. – Fie $u_0 \in D(A)$**. Atunci** $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \overline{u}_0 \in D(A^2)$ **astfel încât** $|u_0 - \overline{u}_0| < \varepsilon$ **şi** $|Au_0 - A\overline{u}_0| < \varepsilon$**. Cu alte cuvinte** $D(A^2)$ **este dens în** $D(A)$ **(pentru norma grafului).**

Demonstraţia lemei VII.2. – Definim $\overline{u}_0 = J_\lambda u_0$ pentru $\lambda > 0$ potrivit, ce va fi fixat mai încolo. Avem

$$\overline{u}_0 \in D(A) \quad \text{şi} \quad \overline{u}_0 + \lambda A\overline{u}_0 = u_0.$$

De aceea, $A\overline{u}_0 \in D(A)$, adică $\overline{u}_0 \in D(A^2)$. Pe de altă parte, din propoziţia VII.2, ştim că

$$\lim_{\lambda \to 0} |J_\lambda u_0 - u_0| = 0, \quad \lim_{\lambda \to 0} |J_\lambda Au_0 - Au_0| = 0$$

şi că $A\overline{u}_0 = J_\lambda Au_0 = AJ_\lambda u_0$. Concluzia dorită urmează prin alegerea lui $\lambda > 0$ suficient de mic.

Ne întoarcem acum la demonstraţia teoremei VII.4. Pentru $u_0 \in D(A)$ dat, construim (utilizând lema VII.2) un şir (u_{0n}) în $D(A^2)$ astfel încât $u_{0n} \to u_0$ şi $Au_{0n} \to Au_0$. Din Etapa 5 cunoaştem că există o soluţie u_n a problemei

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n = 0 \quad \text{pe } [0, +\infty), \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases}$$

Pentru orice $t \geq 0$, avem

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0n} - u_{0m}| \longrightarrow_{m,n\to\infty} 0,$$

$$\left|\frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t)\right| \leq |Au_{0n} - Au_{0m}| \longrightarrow_{m,n\to\infty} 0.$$

De aceea

$$\begin{aligned} u_n(t) &\to u(t) && \text{uniform pe } [0, +\infty) \\ \frac{du_n}{dt}(t) &\to \frac{du}{dt}(t) && \text{uniform pe } [0, +\infty) \end{aligned}$$

cu $u \in C^1([0, +\infty);\ H)$. Trecând la limită în (19) – utilizând faptul că A este un operator închis – observăm că $u(t) \in D(A)$ şi u satisface (6). Din (6) deducem că $u \in C([0, +\infty);\ D(A))$.

Remarca 4. – Fie u_λ soluţia lui (7):

a) **Presupunem că** $u_0 \in D(A)$. Ştim (din Etapa 3) că, atunci când $\lambda \to 0$, $u_\lambda(t)$ converge, pentru orice $t \geq 0$, la o anumită limită $u(t)$. Se poate demonstra direct (vezi [EX]) că $u \in C^1([0, +\infty);\ H) \cap C([0, +\infty);\ D(A))$ şi că satisface (6).

b) **Presupunem doar că** $u_0 \in H$. Se poate încă demonstra că, atunci când $\lambda \to 0$, $u_\lambda(t)$ converge pentru orice $t \geq 0$, la o anumită limită, notată cu $u(t)$ (vezi [EX]). Dar se poate întâmpla ca această limită $u(t) \notin D(A) \quad \forall t > 0$ şi ca $u(t)$ să nu fie diferenţiabilă nicăieri pe $(0, +\infty)$ (vezi [EX]). Din această cauză $u(t)$ nu este o soluţie "clasică" a lui (6). De fapt, pentru un astfel de u_0, problema (6) nu are soluţie clasică. Cu toate acestea putem privi pe $u(t)$ ca o **soluţie** "**generalizată**" a lui (6). Vom vedea în § VII.4 ce se întâmplă când A este **autoadjunct**: în acest caz $u(t)$ este o soluţie **"clasică"** a lui (6) pentru **orice** $u_0 \in H$ – chiar dacă $u_0 \notin D(A)$.

$\star$ Remarca 5 (Semigrupuri de contracţie). – Pentru orice $t \geq 0$ considerăm aplicaţia liniară $u_0 \in D(A) \mapsto u(t) \in D(A)$ unde $u(t)$ este soluţia lui (6) dată de teorema VII.4. Deoarece $|u(t)| \leq |u_0|$ şi $D(A)$ este dens în H putem extinde această aplicaţie prin continuitate la un operator mărginit de la H în el însuşi, notat prin $S_A(t)$ ([4]). Este uşor de verificat că $S_A(t)$ satisface următoarele proprietăţi:

[4] Ori se poate utiliza remarca 4 pentru a defini direct $S_A(t)$ pe H ca fiind aplicaţia $u_0 \in H \mapsto u(t) \in H$.

(a) Pentru orice $t \geq 0$, $S_A(t) \in \mathcal{L}(H)$ şi $\|S_A(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$

$$(b) \quad \begin{cases} S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_1) \circ S_A(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0, \\ S_A(0) = I. \end{cases}$$

(c) $\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} |S_A(t)u_0 - u_0| = 0 \quad \forall u_0 \in H.$

O astfel de familie de operatori $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ (de la H în el însuşi) depinzând de un parametru $t \geq 0$ şi satisfăcând a), b), c) se va numi **semigrup continuu de contracţii**.

Un rezultat remarcabil datorat lui Hille şi Yosida afirmă, invers, că fiind dat un semigrup continuu de contracţii $S(t)$ pe H există un operator maximal monoton unic A astfel încât $S(t) = S_A(t) \quad \forall t \geq 0$. Aceasta stabileşte o **corespondenţă bijectivă între operatorii maximal monotoni şi semigrupurile continue de contracţii**. (Pentru demonstraţie vezi [EX] şi referinţele citate în comentariile asupra capitolului VII).

• Remarca 6. – Fie A un operator maximal monoton şi $\lambda \in \mathbf{R}$. Problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + \lambda u = 0 \quad \text{pe } [0, +\infty), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

se reduce la problema (6) utilizând următoarea schemă simplă. Definim

$$v(t) = e^{\lambda t} u(t),$$

aşa încât v satisface

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av = 0 \quad \text{pe } [0, +\infty), \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

VII.3 Regularitate

Vom arăta aici că soluţia u a lui (6) obţinută în teorema VII.4 este **mai netedă** ([5]) decât în acest moment $C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty); D(A))$

[5]Reamintim că teorema VII.4 afirmă doar că $u \in C^1([0, \infty); H)$.

cu condiţia să impunem ipoteze suplimentare asupra datei iniţiale u_0. In acest scop definim prin inducţie spaţiul

$$D(A^k) = \{v \in D(A^{k-1});\ Av \in D(A^{k-1})\}$$

unde k este un întreg arbitrar, $k \geq 2$. Este uşor de văzut că $D(A^k)$ este un spaţiu Hilbert pentru produsul scalar

$$(u,\, v)_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} (A^j u,\, A^j v);$$

norma corespunzătoare este

$$|u|_{D(A^k)} = \left(\sum_{j=0}^{k} |A^j u|^2 \right)^{1/2}.$$

Teorema VII.5. – **Presupunem că** $u_0 \in D(A^k)$ **pentru un anume întreg** $k \geq 2$. **Atunci soluţia** u **a problemei (6) obţinută în teorema VII.4 satisface**

$$u \in C^{k-j}([0, +\infty);\ D(A^j)) \quad \forall j = 0, 1, \ldots, k.$$

Demonstraţie. – Presupunem întâi $k = 2$. Considerăm spaţiul Hilbert $H_1 = D(A)$ înzestrat cu produsul scalar $(u,\, v)_{D(A)}$. Este uşor de verificat că operatorul $A_1 : D(A_1) \subset H_1 \to H_1$ definit de

$$\begin{cases} D(A_1) = D(A^2) \\ A_1 u = Au \quad \text{pentru } u \in D(A_1) \end{cases}$$

este maximal monoton în H_1. Aplicând teorema VII.4 **operatorului** A_1 **în spaţiul** H_1 vedem că există o funcţie

$$u \in C^1([0, +\infty);\ H_1) \cap C([0, +\infty);\ D(A_1))$$

astfel încât

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A_1 u = 0 \quad \text{pe } [0, +\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

In particular, u satisface (6); din unicitate, acest u este soluţia lui (6). Rămâne doar de verificat că $u \in C^2([0,+\infty);\ H)$. Deoarece

$$A \in \mathcal{L}(H_1, H) \quad \text{şi} \quad u \in C([0,+\infty); H_1)$$

urmează că $Au \in C^1([0,+\infty);\ H)$ şi

$$\frac{d}{dt}(Au) = A\left(\frac{du}{dt}\right). \tag{19}$$

Aplicând (6) vedem că $\dfrac{du}{dt} \in C^1([0,+\infty);\ H)$, adică $u \in C^2([0,+\infty);\ H)$ şi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right) + A\left(\frac{du}{dt}\right) = 0 \quad \text{pe } [0,+\infty). \tag{20}$$

Revenim acum la cazul general $k \geq 3$. Procedăm prin inducţie după k: presupunem că rezultatul se menţine până la ordinul $(k-1)$ şi fie $u_0 \in D(A^k)$. Din analiza precedentă cunoaştem că soluţia u a lui (6) aparţine lui $C^2([0,+\infty);\ H) \cap C^1([0,+\infty);\ D(A))$ şi că u satisface (20). Luând

$$v = \frac{du}{dt}$$

avem:

$$v \in C^1([0,+\infty);\ H) \cap C([0,+\infty);\ D(A)),$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av = 0 \quad \text{pe } [0,+\infty) \\ v(0) = -Au_0. \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, v este **soluţia** lui (6) corespunzătoare datei iniţiale $v_0 = -Au_0$. Deoarece $v_0 \in D(A^{k-1})$ ştim, din ipoteza de inducţie, că

$$v \in C^{k-1-j}([0,+\infty);\ D(A^j)) \quad \forall j = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{21}$$

adică

$$u \in C^{k-j}([0,+\infty);\ D(A^j)) \quad \forall j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Rămâne doar de verificat că

$$u \in C([0,+\infty);\ D(A^k)). \tag{22}$$

Aplicând (21) cu $j = k - 1$, vedem că

$$\frac{du}{dt} \in C([0, +\infty);\ D(A^{k-1})). \tag{23}$$

Din (23) şi ecuaţia (6) urmează că

$$Au \in C([0, +\infty);\ D(A^{k-1})),$$

adică (22).

VII.4 Cazul autoadjunct

Fie $A : D(A) \subset H \to H$ un operator liniar, nemărginit cu $\overline{D(A)} = H$. Identificând H' cu H îl putem privi pe A^* ca un operator liniar, nemărginit pe H.

Definiţie. – Se spune că:
A este **simetric** dacă

$$(Au,\, v) = (u,\, Av) \quad \forall u,\, v \in D(A),$$

A este **autoadjunct** dacă $D(A^*) = D(A)$ şi

$$A^* = A.$$

REMARCA 7. – Pentru operatorii **mărginiţi** noţiunile de operatori simetrici şi autoadjuncţi coincid. Totuşi, dacă A este **nemărginit** există o **diferenţă subtilă** între operatorii **simetrici** şi cei **autoadjuncţi**. Este limpede că orice operator autoadjunct este simetric. Reciproca nu este adevărată: un operator A este simetric dacă şi numai dacă $A \subset A^*$, adică $D(A) \subset D(A^*)$ şi $A^* = A$ pe $D(A)$. Se poate întâmpla ca A să fie simetric şi $A \neq A^*$ (vezi [EX]). Următorul nostru rezultat arată că dacă A este **maximal monoton**, atunci

$$(A \text{ este simetric}) \Leftrightarrow (A \text{ este autoadjunct}).$$

Propoziţia VII.6. – Fie A un operator simetric, maximal monoton. Atunci A este autoadjunct.

DEMONSTRAŢIE. – Fie $J_1 = (I + A)^{-1}$. Vom demonstra întâi că J_1 este autoadjunct. Deoarece $J_1 \in \mathcal{L}(H)$ este suficient să verificăm că

$$(J_1 u,\ v) = (u,\ J_1 v) \quad \forall u, v \in H. \tag{24}$$

Definim $u_1 = J_1 u$ şi $v_1 = J_1 v$, aşa încât

$$u_1 + Au_1 = u,$$

$$v_1 + Av_1 = v.$$

Deoarece, din presupunere, $(u_1,\ Av_1) = (Au_1,\ v_1)$ urmează că $(u_1, v) = (u, v_1)$, adică (24).

Fie $u \in D(A^*)$ şi definim $f = u + A^*u$. Avem

$$(f, v) = (u, v + Av) \quad \forall v \in D(A),$$

adică

$$(f, J_1 w) = (u, w) \quad \forall w \in H.$$

Astfel $u = J_1 f$ şi, de aceea, $u \in D(A)$. Aceasta probează că $D(A^*) = D(A)$ şi de aici A este autoadjunct.

REMARCA 8. – Trebuie avut grijă că dacă A este un operator monoton (chiar un operator monoton simetric) atunci A^* nu este, in mod necesar, monoton; vezi [EX]. Totuşi se poate demonstra (vezi [EX]) că următoarele proprietăţi sunt echivalente:

A este maximal monoton

$\Longleftrightarrow$ A^* este maximal monoton

$\Longleftrightarrow$ A este închis, $D(A)$ este dens, A şi A^* sunt monotoni.

• **Teorema VII.7. – Fie A un operator maximal monoton şi autoadjunct. Atunci, pentru orice $u_0 \in H$ ([6]) există o funcţie unică**

$$u \in C([0, +\infty);\ H) \cap C^1((0, +\infty);\ H) \cap C((0, +\infty);\ D(A))$$

[6] Accentuăm diferenţa dintre teorema VII.4 şi VII.7. Aici $u_0 \in H$ (în locul lui $u_0 \in D(A)$); concluzia este aceea că există o soluţie netedă a lui (6) departe de $t = 0$. Totuşi este posibil ca $\frac{du}{dt}(t)$ să "explodeze" când $t \to 0$.

astfel încât

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \textbf{pe } (0, +\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Mai mult, avem

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \textbf{şi} \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t}|u_0| \quad \forall t > 0,$$

(25) $$u \in C^k((0, +\infty);\ D(A^\ell)) \quad \forall k, \ell \textbf{ întregi}.$$

Demonstraţie. –

Unicitatea. Fie u şi $\overline{u}$ două soluţii. Din monotonia lui A vedem că $\varphi(t) = |u(t) - \overline{u}(t)|^2$ este monoton descrescătoare pe $(0, +\infty)$. Pe de altă parte φ este continuă pe $[0, +\infty)$ şi $\varphi(0) = 0$. De aceea, $\varphi \equiv 0$.

Existenţa. Demonstraţia este divizată în două etape.

Etapa 1. – Presupunem întâi că $u_0 \in D(A^2)$ şi fie u soluţia lui (6) dată de teorema VII.4. Afirmăm că

(26) $$\left|\frac{du}{dt}(t)\right| \leq \frac{1}{t}|u_0| \quad \forall t > 0.$$

La fel ca în demonstraţia propoziţiei VII.6 avem

$$J_\lambda^* = J_\lambda \quad \text{şi} \quad A_\lambda^* = A_\lambda \quad \forall \lambda > 0.$$

Ne întoarcem la problema aproximantă introdusă în demonstraţia teoremei VII.4:

(27) $$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \quad \text{pe} \quad [0, +\infty), \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases}$$

Luând produsul scalar a lui (27) cu u_λ şi integrând pe $[0, T]$ găsim

(28) $$\frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda,\ u_\lambda)\, dt = \frac{1}{2}|u_0|^2.$$

Luând produsul scalar a lui (27) cu $t\dfrac{du_\lambda}{dt}$ şi integrând pe $[0, T]$ obţinem

(29) $$\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 t\, dt + \int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda(t),\ \frac{du_\lambda}{dt}(t)\right) t\, dt = 0.$$

Dar

$$\frac{d}{dt}\left(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda\right) = \left(A_\lambda \frac{du_\lambda}{dt},\ u_\lambda\right) + \left(A_\lambda u_\lambda,\ \frac{du_\lambda}{dt}\right) = 2\left(A_\lambda u_\lambda,\ \frac{du_\lambda}{dt}\right)$$

deoarece $A_\lambda^* = A_\lambda$.

Integrând prin părţi avem

$$(30)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda(t),\ \frac{du_\lambda}{dt}(t)\right) t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}[(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)]t\,dt \\ \displaystyle = \frac{1}{2}\left(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)\right)T - \frac{1}{2}\int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda\right)dt. \end{cases}$$

Pe de altă parte, deoarece funcţia $t \mapsto \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|$ este monoton descrescătoare (din lema VII.1), avem

$$(31)\qquad \int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 t\,dt \geq \left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 \frac{T^2}{2}.$$

Combinând (28), (29), (30) şi (31) obţinem

$$\frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + T(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)) + T^2\left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 \leq \frac{1}{2}|u_0|^2;$$

Urmează, în particular, că

$$(32)\qquad \left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right| \leq \frac{1}{T}|u_0| \quad \forall T > 0.$$

In final, trecem la limită în (32) când $\lambda \to 0$. Aceasta completează demonstraţia lui (26) deoarece $\frac{du_\lambda}{dt} \to \frac{du}{dt}$ (vezi Etapa 5 din demonstraţia teoremei VII.4).

Etapa 2. – Presupunem acum că $u_0 \in H$. Fie (u_{0n}) un şir din $D(A^2)$ astfel încât $u_{0n} \to u_0$ (reamintim că $D(A^2)$ este dens în $D(A)$ şi că $D(A)$ este dens în H; astfel $D(A^2)$ este dens în H). Fie u_n soluţia lui

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n = 0 \quad \text{pe } [0, +\infty), \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases}$$

Ştim (din teorema VII.4) că

$$|u_n(t) - u_m(t)| \le |u_{0n} - u_{0m}| \quad \forall m, n, \quad \forall t \ge 0$$

şi (din Etapa 1) că

$$\left| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right| \le \frac{1}{t} |u_{0n} - u_{0m}| \quad \forall m, n, \quad \forall t > 0.$$

Urmează că $u_n(t)$ converge uniform pe $[0, +\infty)$ la o anumită limită $u(t)$ şi că $\dfrac{du_n}{dt}(t)$ converge la $\dfrac{du}{dt}(t)$ uniform pe fiecare interval $[\delta, +\infty)$, $\delta > 0$. Funcţia limită u satisface

$$u \in C([0, +\infty);\ H) \cap C^1((0, +\infty);\ H),$$

$$u(t) \in D(A) \quad \forall t > 0 \quad \text{şi} \quad \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

(se utilizează faptul că A este închis).

Revenim acum la **demonstraţia lui (25)**. – Vom arăta prin inducţie după $k \ge 2$ că

$$u \in C^{k-j}((0, +\infty);\ D(A^j)) \quad \forall j = 0, 1, \ldots, k. \tag{33}$$

Presupunem că (33) este valabilă până la ordinul $k - 1$. In particular avem

$$u \in C((0, +\infty);\ D(A^{k-1})). \tag{34}$$

Pentru a arăta (33) este suficient (în virtutea teoremei VII.5) să verificăm că

$$u \in C((0, +\infty), D(A^k)). \tag{35}$$

Considerăm spaţiul Hilbert $\tilde{H} = D(A^{k-1})$ şi operatorul $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset \tilde{H} \to \tilde{H}$ definit de

$$\begin{cases} D(\tilde{A}) = D(A^k) \\ \tilde{A} = A. \end{cases}$$

Este uşor de văzut că $\tilde{A}$ este maximal monoton şi simetric în $\tilde{H}$; de aceea, acesta este autoadjunct. Aplicând prima aserţiune a teoremei VII.7 în spaţiul $\tilde{H}$ operatorului $\tilde{A}$ obţinem o soluţie unică v a problemei

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt} + Av = 0 \quad \text{pe } (0, +\infty) \\ v(0) = v_0 \end{array} \right. \tag{36}$$

pentru orice $v_0 \in \tilde{H}$ dat. Mai mult

$$v \in C([0, +\infty);\ \tilde{H}) \cap C^1((0, +\infty);\ \tilde{H}) \cap C((0, +\infty);\ D(\tilde{A})).$$

Alegând $v_0 = u(\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ – ştim deja din (34) că $v_0 \in \tilde{H}$ – conchidem că $u \in C((\varepsilon, +\infty);\ D(A^k))$ şi aceasta completează demonstraţia lui (35).

VII.5 Comentarii asupra capitolului VII

1) Teorema lui Hille-Yosida în spaţii Banach.

Teorema lui Hille-Yosida se extinde la spaţii Banach. Afirmaţia precisă este următoarea. Fie E un spaţiu Banach şi $A : D(A) \subset E \to E$ un operator liniar nemărginit. Se spune că A este m-**acretiv** dacă $\overline{D(A)} = E$ şi pentru orice $\lambda > 0$, $I + \lambda A$ este bijectiv de la $D(A)$ la E cu $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$.

Teorema VII.8 (Hille-Yosida). – Fie A m-acretiv în E. Atunci pentru orice $u_0 \in D(A)$ dat, există o funcţie unică

$$u \in C^1([0, +\infty);\ E) \cap C([0, +\infty);\ D(A))$$

astfel încât

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \textbf{pe } [0, +\infty) \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \tag{37}$$

In plus, avem

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \textbf{şi} \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\| \quad \forall t \geq 0.$$

Aplicaţia $u_0 \mapsto u(t)$ extinsă prin continuitate la întregul E este notată prin $S_A(t)$. $S_A(t)$ este un semigrup continuu de contracţii pe E. Reciproc, pentru orice semigrup continuu de contracţii $S(t)$, există un operator m-acretiv unic A astfel încât $S(t) = S_A(t) \quad \forall t \geq 0$.

Pentru demonstraţie, a se vedea J. Goldstein [1], Yosida [1], Schechter [1], Reed-Simon [1], Volumul 2, Tanabe [1], Pazy [1], Dunford-Schwartz [1], Volumul 1, Friedman [2], Davies [1], Balakrishnan [1] şi [EX]. Aceste referinţe oferă vaste progrese asupra teoriei semigrupurilor.

2) Formula exponenţială.

Există numeroase tehnici iterative pentru rezolvarea lui (37). Vom menţiona o metodă de bază:

Teorema VII.9. – Presupunem că A este m-acretiv. Atunci pentru orice $u_0 \in D(A)$ soluţia u a lui (38) este dată de "formula exponenţială"

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-1} \right]^n u_0. \tag{38}$$

Pentru demonstraţie a se vedea Yosida [1] şi Pazy [1].

In limbajul **Analizei Numerice**, formula (38) corespunde schemei de **discretizare a timpului implicit** pentru (37) (vezi Raviart-Thomas [1]). Mai precis, se împarte intervalul $[0, t]$ în n intervale de lungime egală $\Delta t = t/n$ şi se rezolvă inductiv ecuaţiile

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta t} + Au_{j+1} = 0; \ j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

pornind cu u_0. Cu alte cuvinte u_n este dat de

$$u_n = (I + \Delta t A)^{-n} u_0 = \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} u_0.$$

Când $n \to \infty$ (adică $\Delta t \to 0$) este "intuitiv" că u_n converge către $u(t)$.

3) Teorema VII.7 este un prim pas către teoria **semigrupurilor analitice**. Asupra acestui subiect a se vedea Yosida [1], Kato [1], Reed-Simon [1], Volumul [2], Friedman [2], Pazy [1] şi Tanabe [1].

4) Ecuaţii neomogene. Ecuaţii neliniare.

Considerăm problema

$$(39) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \quad \text{pe } [0,T] \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Următorul rezultat este valabil

Teorema VII.10. – Presupunem că A este m-acretiv. Atunci pentru orice $u_0 \in D(A)$ şi orice $f \in C^1([0,T];\ E)$ există o soluţie unică u a lui (39) cu

$$u \in C^1([0,T];\ E) \cap C([0,T];\ D(A)).$$

In plus, soluţia u este dată de formula

$$(40) \qquad u(t) = S_A(t)u_0 + \int_0^t S_A(t-s)f(s)\,ds$$

(unde $S_A(t)$ este semigrupul introdus in 1).

Punctăm că dacă se presupune doar $f \in L^1(0,T;\ E)$, formula (40) încă are sens şi oferă o soluţie generalizată a lui (39). Asupra acestor probleme vezi Kato [1], Pazy [1], Martin [1], Tanabe [1].

In aplicaţiile din fizică se întâlnesc multe ecuaţii “semiliniare” de forma

$$\frac{du}{dt} + Au = F(u)$$

unde F este o aplicaţie **neliniară** de la X la X. Asupra acestor chestiuni vezi Martin [1], Brezis [2] şi comentariile asupra capitolului X.

Menţionăm, de asemenea, că majoritatea rezultatelor din capitolului VII admit versiuni neliniare, adică $A : D(A) \subset E \to E$ este un operator neliniar; vezi Brezis [1], Barbu [1], Bénilan-Crandall-Pazy [1].

Capitolul VIII

SPAŢII SOBOLEV ŞI FORMULAREA VARIAŢIONALĂ A PROBLEMELOR LA LIMITĂ ÎN DIMENSIUNE UNU

VIII.1 Motivaţia

Considerăm problema următoare. Fiind dat $f \in C([a,b])$ să se găsească o funcţie $u(x)$ care verifică

$$(1) \qquad \begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{în } [a,b], \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

O soluţie **clasică** – sau soluţie **tare** – a problemei (1) este o funcţie de clasă C^2 pe $[a,b]$ verificând (1) în sens uzual. Bineînţeles, (1) poate fi rezolvată explicit printr-un calcul foarte simplu, dar vom ignora acest aspect pentru a ilustra metoda pe acest exemplu elementar.

Inmulţind (1) cu $\varphi \in C^1([a,b])$ şi integrând prin părţi obţinem

$$(2) \qquad \int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Observăm că (2) are sens dacă $u \in C^1([a,b])$ (în timp ce (1) presupune că u este de două ori derivabilă); de fapt ar fi suficient să avem u, $u' \in L^1(a,b)$ unde u' are un sens care încă nu este precizat. Să spunem (pentru moment) că o funcţie u de clasă C^1 care verifică (2) este o soluţie **slabă** a lui (1).

Programul următor descrie liniile mari ale **tratării variaţionale** din teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale:

Pasul A. – Se precizează noţiunea de soluţie slabă; aceasta face să intervină **spaţiile Sobolev** care sunt **instrumentul de bază**.

Pasul B. – Stabilim **existenţa** şi **unicitatea soluţiei slabe** prin metoda variaţională, via teorema lui Lax-Milgram.

Pasul C. – Arătăm că soluţia slabă este de clasă C^2 (de exemplu): acesta este un rezultat de **regularitate**.

Pasul D. – Reîntoarcerea la soluţiile clasice. Se arată că o soluţie slabă de clasă C^2 este o soluţie clasică.

Pasul D este foarte simplu. Intr-adevăr, să presupunem că $u \in C^2([a,b])$, $u(a) = u(b) = 0$ şi că u satisface (2). Integrând (2) prin părţi obţinem

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C^1([a,b]),\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

şi deci

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1((a,b)).$$

Dar $C_c^1((a,b))$ este dens în $L^2(a,b)$ (vezi corolarul IV.23) şi deci $-u''+u = f$ a.p.t. în (a,b) (deci peste tot în $[a,b]$ deoarece $u \in C^2([a,b])$.)

VIII.2 Spaţiul Sobolev $W^{1,p}(I)$

Fie $I = (a,b)$ un interval **mărginit sau nemărginit** şi fie $p \in \mathbf{R}$ cu $1 \leq p \leq \infty$.

Definiţie. – **Spaţiul Sobolev** $W^{1,p}(I)$ ([1]) se defineşte prin

$$\boxed{\begin{aligned} W^{1,p}(I) \ &= \{u \in L^p(I); \quad \exists g \in L^p(I) \\ &\quad \text{astfel încât } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)\}. \end{aligned}}$$

Punem

$$\boxed{H^1(I) = W^{1,2}(I)}.$$

[1] Dacă nu există pericol de confuzie vom scrie $W^{1,p}$ în loc de $W^{1,p}(I)$.

Pentru $u \in W^{1,p}(I)$ vom nota $u' = g$. ([2])

Remarca 1. – In definiţia lui $W^{1,p}$ spunem că φ este o **funcţie test**. Putem utiliza $C_c^\infty(I)$ sau $C_c^1(I)$ ca mulţimi de funcţii test deoarece dacă $\varphi \in C_c^1(I)$, atunci $\rho_n * \varphi \in C_c^\infty(I)$ pentru n suficient de mare şi $\rho_n * \varphi \to \varphi$ în C^1 (vezi §IV.4; desigur, se poate defini produsul de convoluţie $\rho_n * \varphi$ se începe prin a prelungi φ cu 0 în afara lui I).

Remarca 2. – Este evident că dacă $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ şi dacă $u' \in L^p(I)$ (aici u' este derivata uzuală a lui u) atunci $u \in W^{1,p}(I)$. In plus, derivata uzuală a lui u coincide cu derivata lui u în sens $W^{1,p}$. In particular, dacă I este mărginit, atunci $C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I)$ pentru orice $1 \leq p \leq \infty$.

Exemple. – Fie $I = (-1, +1)$. Verificăm cu titlu de exerciţiu că:

(i) Funcţia $u(x) = |x|$ aparţine lui $W^{1,p}(I)$ pentru orice $1 \leq p \leq \infty$ şi $u' = g$ unde

$$g(x) = \begin{cases} +1 & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{dacă } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Mai general, o funcţie continuă pe $\bar{I}$ care este de clasă C^1 pe porţiuni pe $\bar{I}$ aparţine lui $W^{1,p}(I)$ pentru orice $1 \leq p \leq \infty$.

(ii) Funcţia g de mai sus **nu** aparţine lui $W^{1,p}(I)$ pentru orice $1 \leq p \leq \infty$.

$\star$ Remarca 3. – Pentru a defini $W^{1,p}$ putem folosi şi limbajul teoriei distribuţiilor (vezi L. Schwartz [1]). Orice funcţie $u \in L^p(I)$ admite o derivată în sensul distribuţiilor, care este un element al uriaşului spaţiu $\mathcal{D}'(I)$. Spunem că $u \in W^{1,p}$ dacă această derivată-distribuţie coincide, în spaţiul $\mathcal{D}'(I)$, cu o funcţie din L^p.

Dacă $I = \mathbf{R}$ şi $p = 2$, se pot defini spaţiile Sobolev folosind şi transformata Fourier; vezi de exemplu Lions-Magenes [1], Malliavin [1]. Nu vom utiliza însă acest punct de vedere în cele ce urmează.

Notaţii. – Spaţiul $W^{1,p}$ este înzestrat cu norma

$$\boxed{\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}}$$

[2]Remarcăm că aceasta are sens: g este unică conform lemei IV.2.

(sau uneori, dacă $1 < p < \infty$, cu norma echivalentă $(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{1/p}$). Spaţiul H^1 este înzestrat cu produsul scalar

$$\boxed{(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (u',v')_{L^2} = \int_a^b (uv + u'v');}$$

norma asociată

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2}$$

este echivalentă cu norma din $W^{1,2}$.

Propoziţia VIII.1. – Spaţiul $W^{1,p}$ este un spaţiu Banach pentru $1 \leq p \leq \infty$. Spaţiul $W^{1,p}$ este reflexiv ([3]) pentru $1 < p < \infty$ şi separabil pentru $1 \leq p < \infty$. Spaţiul H^1 este un spaţiu Hilbert separabil.

Demonstraţie. –

a) Fie (u_n) un şir Cauchy în $W^{1,p}$; atunci (u_n) şi (u'_n) sunt şiruri Cauchy în L^p. Rezultă că $u_n \to u$ în L^p şi $u'_n \to g$ în L^p. Avem

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I u'_n \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

şi, prin trecere la limită,

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Deci $u \in W^{1,p}$, $u' = g$ şi $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$.

b) $W^{1,p}$ este **reflexiv** pentru $1 < p < \infty$.

Intr-adevăr, spaţiul produs $E = L^p(I) \times L^p(I)$ este reflexiv. Operatorul $T : W^{1,p} \to E$ definit prin $Tu = [u, u']$ este o izometrie de la $W^{1,p}$ în E; deci $T(W^{1,p})$ este un subspaţiu închis al lui E. Rezultă că $T(W^{1,p})$ este reflexiv (vezi propoziţia III.17). In consecinţă, $W^{1,p}$ este, de asemenea, reflexiv.

c) $W^{1,p}$ este **separabil** pentru $1 \leq p < \infty$.

Intr-adevăr, spaţiul produs $E = L^p(I) \times L^p(I)$ este separabil. Deci $T(W^{1,p})$ este, de asemenea, separabil (vezi propoziţia III.22). In consecinţă, $W^{1,p}$ este separabil.

[3]Această proprietate este un avantaj **considerabil** al spaţiilor $W^{1,p}$. In problemele de **calcul variaţional** se utilizează de preferinţă $W^{1,p}$ în locul lui C^1, care nu este reflexiv (vezi corolarul III.20).

Remarca 4. – Reţinem din demonstraţia precedentă aspectul următor: fie (u_n) un şir în $W^{1,p}$ astfel încât $u_n \to u$ în L^p şi (u'_n) converge către o anumită limită în L^p, atunci $u \in W^{1,p}$ şi $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$. De fapt, dacă $1 < p \leq \infty$ este suficient să ştim că $u_n \to u$ în L^p şi $\|u'_n\|_{L^p}$ este **mărginit** pentru a deduce că $u \in W^{1,p}$ (vezi [EX]).

Funcţiile din $W^{1,p}$ sunt "în mare" primitive ale funcţiilor din L^p. Mai precis, avem

Teorema VIII.2. – Fie $u \in W^{1,p}(I)$; atunci există o funcţie $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ astfel încât

$$u = \tilde{u} \ \ \textbf{a.p.t. în } I$$

şi

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\, dt \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Remarca 5. – Precizăm forţa teoremei VIII.2. Observăm mai întâi că dacă o funcţie $u \in W^{1,p}$, atunci orice funcţie v astfel încât $v = u$ a.p.t. în I aparţine de asemenea lui $W^{1,p}$. Teorema VIII.2 afirmă că orice funcţie $u \in W^{1,p}$ admite un unic **reprezentant continuu**, adică există o funcţie continuă care aparţine clasei de echivalenţă a lui u pentru relaţia $u \sim v$ dacă $v = u$ a.p.t. Când va fi necesar ([4]) vom înlocui în mod sistematic u prin reprezentantul său continuu; pentru a nu îngreuna notaţiile vom nota tot cu u reprezentantul său continuu. Remarcăm, de asemenea, că proprietatea "u admite un reprezentant continuu" nu este aceeaşi cu "u este continuă a.p.t.".

Remarca 6. – Este evident că dacă $u \in W^{1,p}$ şi $u' \in C(\bar{I})$ atunci $u \in C^1(\bar{I})$; mai precis, $\tilde{u} \in C^1(\bar{I})$, dar, aşa cum s-a menţionat mai sus, nu vom face distincţie între u şi $\tilde{u}$.

In demonstraţia teoremei VIII.2 vom utiliza

Lema VIII.1. – Fie $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ astfel încât

$$\int_I f\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(I). \tag{3}$$

[4] De exemplu, pentru a da un sens lui $u(x)$, $\forall\, x \in \bar{I}$.

Atunci există o constantă C **astfel încât** $f = C$ **a.p.t. în** I**.**

DEMONSTRAŢIE. – Fixăm o funcţie $\psi \in C_c(I)$ astfel încât $\int_I \psi = 1$. Pentru orice $w \in C_c(I)$ există $\varphi \in C_c^1(I)$ astfel încât

$$\varphi' = w - \left(\int_I w\right)\psi.$$

Intr-adevăr, funcţia $h = w - \left(\int_I w\right)\psi$ este continuă, are suportul compact inclus în I şi $\int_I h = 0$. Deci h admite o primitivă (unică) cu suport compact. Din (3) deducem că

$$\int_I f\left[w - \left(\int_I w\right)\psi\right] = 0 \quad \forall w \in C_c(I)$$

adică

$$\int_I \left[f - \left(\int_I f\psi\right)\right] w = 0 \quad \forall w \in C_c(I)$$

şi deci (lema IV.2), $f - \left(\int_I f\psi\right) = 0$ a.p.t. în I, adică $f = C$ a.p.t. în I, cu $C = \int_I f\psi$.

Lema VIII.2. – **Fie** $g \in L^1_{\text{loc}}(I)$**; pentru** y_0 **fixat în** I**, fie**

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)\, dt,\ x \in I.$$

Atunci $v \in C(I)$ **şi**

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

DEMONSTRAŢIE. – Avem

$$\begin{aligned}\textstyle\int_I v\varphi' &= \textstyle\int_I \left[\int_{y_0}^x g(t)dt\right]\varphi'(x)\, dx\\ &= \textstyle -\int_a^{y_0} dx \int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)\, dt + \int_{y_0}^b dx \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)\, dt.\end{aligned}$$

Aplicând teorema lui Fubini, deducem că

$$\begin{aligned}\int_I v\varphi' &= -\int_a^{y_0} g(t)dt \int_a^t \varphi'(x)\, dx + \int_{y_0}^b g(t)\, dt \int_t^b \varphi'(x)\, dx\\ &= -\int_I g(t)\varphi(t)\, dt.\end{aligned}$$

Demonstraţia teoremei VIII.2. – Fixăm $y_0 \in I$ şi punem $\bar{u}(x) = \int_{y_0}^{x} u'(t)\,dt$. Conform lemei VIII.2 avem

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Deci $\int_I (u-\bar{u})\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$. Rezultă din lema VIII.1 că $u-\bar{u} = C$ a.p.t. în I. Funcţia $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + C$ are proprietăţile cerute.

Remarca 7. – Lema VIII.2 arată că primitiva v a unei funcţii $g \in L^p$ aparţine lui $W^{1,p}$ dacă ştim că $v \in L^p$ – ceea ce se întâmplă întotdeauna dacă I este mărginit.

Propoziţia VIII.3. – Fie $u \in L^p(I)$ cu $1 < p \leq \infty$. Următoarele proprietăţi sunt echivalente:

(i) $u \in W^{1,p}(I)$.

(ii) **Există o constantă C astfel încât**

$$\left|\int_I u\varphi'\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

(iii) **Există o constantă C astfel încât pentru orice mulţime deschisă $\omega \subset\subset I$ şi pentru orice $h \in \mathbf{R}$ cu $|h| < \operatorname{dist}(\omega, I^c)$ avem**

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

In plus, putem lua $C = \|u'\|_{L^p(I)}$ în (ii) şi (iii).

Demonstraţie. –

$(i) \Rightarrow (ii)$ Evident.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Funcţionala liniară

$$\varphi \in C_c^1(I) \mapsto \int_I u\varphi'$$

este definită pe un subspaţiu dens al lui $L^{p'}$ şi este continuă în norma $L^{p'}$. Deci ea se prelungeşte la o funcţională liniară şi continuă F pe $L^{p'}$ (se aplică teorema lui Hahn-Banach). Conform teoremei de reprezentare a lui Riesz (teoremele IV.11 şi IV.14) există $g \in L^p$ astfel încât

$$\langle F, \varphi\rangle = \int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in L^{p'}.$$

In particular
$$\int_I u\varphi' = \int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1$$
şi deci $u \in W^{1,p}(I)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Conform teoremei VIII.2, pentru orice $x \in \omega$ avem
$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)\,dt = h\int_0^1 u'(x+sh)\,ds.$$
Deci
$$|u(x+h) - u(x)| \leq |h| \int_0^1 |u'(x+sh)|\,ds.$$
Concluzia este evidentă dacă $p = \infty$. Să presupunem deci că $1 < p < \infty$. Aplicând inegalitatea lui Hölder avem
$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p\,ds.$$
Prin urmare
$$\begin{aligned}\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^p\,dx &\leq |h|^p \int_\omega dx \int_0^1 |u'(x+sh)|^p\,ds \\ &= |h|^p \int_0^1 ds \int_\omega |u'(x+sh)|^p\,dx.\end{aligned}$$
Pentru orice $0 < s < 1$ avem
$$\int_\omega |u'(x+sh)|^p\,dx = \int_{\omega+sh} |u'(y)|^p\,dy \leq \int_I |u'(y)|^p\,dy.$$
De aici rezultă (iii).

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Fie $\varphi \in C_c^1(I)$; alegem $\omega \subset\subset I$ astfel încât $\operatorname{Supp}\varphi \subset \omega$. Pentru h real ales astfel încât $|h| < \operatorname{dist}(\omega, I^c)$ avem
$$\int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)\,dx = \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]\,dx.$$
Utilizând inegalitatea lui Hölder şi (iii) obţinem
$$\left|\int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)\,dx\right| \leq C|h|\,\|\varphi\|_{L^{p'}}.$$
Trecând la limită cu $h \to 0$ deducem de aici că
$$\left|\int_I u\varphi'\right| \leq C\,\|\varphi\|_{L^{p'}} \qquad \forall \varphi \in C_c^1.$$

$\star$ REMARCA 8. – Dacă $p = 1$, implicaţiile următoare rămân adevărate:

$$(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii).$$

Să presupunem în continuare că I este **mărginit**. Funcţiile satisfăcând (i), adică funcţiile din $W^{1,1}(I)$ sunt funcţiile **absolut continue**. Ele sunt, de asemenea, caracterizate de următoarea proprietate:

(AC)

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ a.î. pentru orice şir finit de intervale disjuncte} \\ (a_k, b_k) \subset I \text{ a.î. } \sum |b_k - a_k| < \delta, \text{ avem } \sum |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \end{cases}$$

In acelaşi timp, funcţiile ce verifică (ii) [sau (iii)] cu $p = 1$ sunt funcţiile cu **variaţie mărginită**; aceste funcţii pot fi caracterizate în diverse feluri:

– sunt diferenţe de două funcţii crescătoare mărginite (eventual discontinue) pe I,

– sunt funcţiile u ce verifică proprietatea:

(VB)

$$\begin{cases} \text{există o constantă } C \text{ astfel încât} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| \le C \text{ pentru orice şir } t_0 < t_1 < \ldots < t_k \text{ din } I, \end{cases}$$

– sunt funcţiile $u \in L^1(I)$ a căror derivată în sensul distribuţiilor este o măsură mărginită.

In legătură cu acest subiect se pot consulta lucrările Hewitt-Stromberg [1], Kolmogorov-Fomin [1] sau Chae [1].

Corolarul VIII.4. – O funcţie u din $L^\infty(I)$ aparţine lui $W^{1,\infty}(I)$ dacă şi numai dacă există o constantă C astfel încât

$$|u(x) - u(y)| \le C|x - y| \textbf{ a.p.t. } x, y \in I.$$

DEMONSTRAŢIE. – Se aplică propoziţia VIII.3 $[(i) \Leftrightarrow (iii)]$ cu $p = \infty$.

Anumite operaţii fundamentale din Analiză au un sens numai pentru funcţii definite pe întreaga axă reală $\mathbf{R}$ (de exemplu convoluţia, transformata Fourier, etc.). Este deci util să putem prelungi o funcţie

$u \in W^{1,p}(I)$ la o funcţie $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbf{R})$ ([5]). Rezultatul următor răspunde la această problemă.

Teorema VIII.5. (Operatorul de prelungire). – Fie $1 \le p \le \infty$**. Există un operator de prelungire** $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbf{R})$ **liniar şi continuu astfel încât**

(i) $Pu_{|I} = u \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$,

(ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbf{R})} \le C\|u\|_{L^p(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$,

(iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbf{R})} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$,

(unde C **depinde doar de** $|I| \le \infty$**).** ([6])

Demonstraţie. – Incepem cu cazul $I = (0, \infty)$ şi arătăm că **prelungirea prin reflexie**

$$(Pu)(x) = u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă } x \ge 0 \\ u(-x) & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

răspunde cerinţelor.

Observăm mai întâi că

$$\|u^*\|_{L^p(\mathbf{R})} \le 2\|u\|_{L^p(I)}.$$

Fie

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{dacă } x > 0 \\ -u'(-x) & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Verificăm cu uşurinţă că $v \in L^p(\mathbf{R})$ şi

$$u^*(x) - u^*(0) = \int_0^x v(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Rezultă că $u^* \in W^{1,p}(\mathbf{R})$ (vezi remarca 7) şi $\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbf{R})} \le 2\|u\|_{W^{1,p}(I)}$.

Considerăm acum cazul unui **interval mărginit** I; fără a micşora generalitatea putem presupune că $I = (0, 1)$. **Fixăm** o funcţie $\eta \in C^1(\mathbf{R})$, $0 \le \eta \le 1$, astfel încât

---

[5] Dacă prelungim u cu 0 în afara lui I funcţia astfel obţinută nu aparţine în general lui $W^{1,p}(\mathbf{R})$ (vezi §VIII.3)

[6] Putem lua $C = 4$ în (ii) şi $C = 4(1 + \frac{1}{|I|})$ în (iii).

Fiind dată o funcţie f definită pe $(0,1)$, fie

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

Vom avea nevoie de următorul rezultat.

Lema VIII.3. – Fie $u \in W^{1,p}(I)$**. Atunci**

$$\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty) \text{ **şi** } (\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u}'.$$

Demonstraţie. – Fie $\varphi \in C_c^1(0,\infty)$; atunci

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta\tilde{u}\varphi' &= \int_0^1 \eta u\varphi' = \int_0^1 u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi] = \\ &= -\int_0^1 u'\eta\varphi - \int_0^1 u\eta'\varphi \quad \text{deoarece } \eta\varphi \in C_c^1(0,1) \\ &= -\int_0^\infty (\tilde{u}'\eta + \tilde{u}\eta')\varphi. \end{aligned}$$

Sfârşitul demonstraţiei teoremei VIII.5. – Fiind dat $u \in W^{1,p}(I)$, scriem

$$u = \eta u + (1-\eta)u.$$

Funcţia ηu se prelungeşte **mai întâi** la $(0,\infty)$ prin $\eta\tilde{u}$ (conform lemei VIII.3) şi **apoi** la $\mathbf{R}$ prin reflexie. In acest fel obţinem o funcţie $v_1 \in W^{1,p}(\mathbf{R})$ care prelungeşte ηu şi astfel încât

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbf{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}, \quad \|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbf{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

(unde C depinde de $\|\eta'\|_{L^\infty}$).

Procedăm analog cu funcţia $(1-\eta)u$, adică prelungim **mai întâi** $(1-\eta)u$ la $(-\infty,1)$ prin 0 pe $(-\infty,0]$ şi **apoi** o prelungim la $\mathbf{R}$ printr-o reflexie (în raport cu punctul 1). In acest mod obţinem o funcţie $v_2 \in W^{1,p}(\mathbf{R})$ care prelungeşte $(1-\eta)u$ şi care satisface

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbf{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}, \quad \|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbf{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Atunci $Pu = v_1 + v_2$ satisface condiţiile din teoremă.

Anumite proprietăţi ale funcţiilor de clasă C^1 rămân adevărate pentru funcţiile din $W^{1,p}$ (vezi de exemplu corolarele VIII.9 şi VIII.10). Este foarte comod să stabilim aceste proprietăţi **"prin densitate"** cu ajutorul rezultatului următor.

• **Teorema VIII.6 (Densitate). – Fie** $u \in W^{1,p}(I)$ **cu** $1 \le p < \infty$**. Atunci există un şir** (u_n) **în** $C_c^\infty(\mathbf{R})$ **astfel încât** $u_{n|I} \to u$ **în** $W^{1,p}(I)$.

Demonstraţie. – Putem presupune întotdeauna că $I = \mathbf{R}$; în caz contrar, prelungim u la o funcţie din $W^{1,p}(\mathbf{R})$ folosind teorema VIII.5. Folosim apoi o tehnică importantă de **convoluţie** (care oferă funcţii C^∞) şi de **troncatură** (care oferă funcţii cu suport compact).

a) Convoluţia

Vom folosi

Lema VIII.4. – Fie $\rho \in L^1(\mathbf{R})$ **şi** $v \in W^{1,p}(\mathbf{R})$ **cu** $1 \le p \le \infty$**. Atunci** $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbf{R})$ **şi** $(\rho * v)' = \rho * v'$**.**

Demonstraţie. – Presupunem mai întâi că ρ are suportul compact. Ştim că $\rho * v \in L^p(\mathbf{R})$. Fie $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R})$. Conform propoziţiilor IV.16 şi IV.20 avem

$$\int_{\mathbf{R}} (\rho * v)\varphi' = \int_{\mathbf{R}} v(\check{\rho} * \varphi') = \int_{\mathbf{R}} v(\check{\rho} * \varphi)' = -\int_{\mathbf{R}} v'(\check{\rho} * \varphi) = -\int_{\mathbf{R}} (\rho * v')\varphi.$$

De aici rezultă că

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbf{R}) \quad \text{şi} \quad (\rho * v)' = \rho * v'.$$

Dacă ρ nu are suportul compact introducem un şir (ρ_n) din $C_c(\mathbf{R})$ astfel încât $\rho_n \to \rho$ în $L^1(\mathbf{R})$. Din cele de mai sus rezultă că

$$\rho_n * v \in W^{1,p}(\mathbf{R}) \quad \text{şi } (\rho_n * v)' = \rho_n * v'.$$

Dar $\rho_n * v \to \rho * v$ în $L^p(\mathbf{R})$ şi $\rho_n * v' \to \rho * v'$ în $L^p(\mathbf{R})$ (vezi teorema IV.22). Folosim remarca 4 şi obţinem

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbf{R}) \quad \text{şi } (\rho * v)' = \rho * v'.$$

b) Troncatura

Fixăm o funcţie $\zeta \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ astfel încât $0 \le \zeta \le 1$ şi

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } |x| < 1 \\ 0 & \text{dacă } |x| \ge 2. \end{cases}$$

Definim şirul

$$\zeta_n(x) = \zeta(x/n) \quad \text{for } n = 1, 2, \cdots. \tag{4}$$

Rezultă cu uşurinţă, folosind teorema convergenţei dominate, că dacă o funcţie $f \in L^p(\mathbf{R})$ cu $1 \le p < \infty$ atunci $\zeta_n f \to f$ în $L^p(\mathbf{R})$.

c) Concluzia

Alegem un şir regularizant (ρ_n). Arătăm că şirul $u_n = \zeta_n(\rho_n * u)$ converge la u în $W^{1,p}(\mathbf{R})$. Mai întâi avem $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$. Intr-adevăr, scriem

$$u_n - u = \zeta_n[(\rho_n * u) - u] + [\zeta_n u - u]$$

şi deci

$$\|u_n - u\|_{L^p} \le \|\rho_n * u - u\|_{L^p} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p} \to 0.$$

Apoi, conform lemei VIII.4, avem

$$u_n' = \zeta_n'(\rho_n * u) + \zeta_n(\rho_n * u').$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \|u_n' - u'\|_{L^p} &\le \|\zeta_n'(\rho_n * u)\|_{L^p} + \|\zeta_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^p} \\ &\le \frac{C}{n}\|u\|_{L^p} + \|\rho_n * u' - u'\|_{L^p} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p} \to 0, \end{aligned}$$

unde $C = \|\zeta'\|_{L^\infty}$.

Remarca 9. – In general nu se poate alege în teorema VIII.6 un şir (u_n) din $C_c^\infty(I)$ (vezi §VIII.3). Altfel spus, $C_c^\infty(I)$ nu este dens în $W^{1,p}(I)$ (mai puţin dacă $I = \mathbf{R}$).

• **Teorema VIII.7. – Există o constantă C (depinzând doar de $|I| \le \infty$) astfel încât**

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall 1 \le p \le \infty. \tag{5}$$

Cu alte cuvinte, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ **cu injecţie continuă, pentru orice** $1 \le p \le \infty$.

In plus, dacă I **este mărginit atunci**

(6) **injecţia** $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ **este compactă** $\forall p: \ 1 < p \le \infty$,

(7) **injecţia** $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ **este compactă** $\forall q: \ 1 \le q < \infty$.

Demonstraţie. – Incepem prin a stabili (5) pentru $I = \mathbf{R}$; cazul general se deduce folosind teorema de prelungire (teorema VIII.5). Fie $v \in C_c^1(\mathbf{R})$; dacă $1 \le p < \infty$ definim $G(s) = |s|^{p-1}s$. Funcţia $w = G(v)$ aparţine lui $C_c^1(\mathbf{R})$ şi

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'.$$

Deci pentru $x \in \mathbf{R}$ avem

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)\,dt$$

şi, folosind inegalitatea lui Hölder, obţinem

$$|v(x)|^p \le p\|v\|_{L^p}^{p-1}\|v'\|_{L^p}.$$

De aici deducem, folosind inegalitatea lui Young (vezi §IV.2), că

(8) $$\|v\|_{L^\infty} \le C\|v\|_{W^{1,p}} \quad \forall v \in C_c^1(\mathbf{R})$$

unde C este o constantă universală (independentă de p). ([7])

Raţionăm acum prin densitate. Fie $u \in W^{1,p}(\mathbf{R})$; există un şir $(u_n) \subset C_c^1(\mathbf{R})$ astfel încât $u_n \to u$ în $W^{1,p}(\mathbf{R})$ (teorema VIII.6). Aplicând (8) deducem că (u_n) este un şir Cauchy în $L^\infty(\mathbf{R})$. Deci $u_n \to u$ în $L^\infty(\mathbf{R})$ şi obţinem (5).

Demonstraţia lui (6). – Fie $\mathcal{F}$ bila unitate în $W^{1,p}(I)$ cu $1 < p \le \infty$. Pentru $u \in \mathcal{F}$ avem

$$|u(x) - u(y)| = \left|\int_y^x u'(t)\,dt\right| \le \|u'\|_{L^p}|x-y|^{1/p'} \le |x-y|^{1/p'} \quad \forall x, y \in I.$$

[7]Observăm că $p^{1/p} \le e^{1/e}, \ \forall p \ge 1$.

Rezultă atunci din teorema lui Ascoli că $\mathcal{F}$ este relativ compactă în $C(\bar{I})$.

Demonstraţia lui (7). – Fie $\mathcal{F}$ bila unitate în $W^{1,1}(I)$. Arătăm că $\mathcal{F}$ este relativ compactă în $L^q(I)$ (pentru orice $1 \le q < \infty$) aplicând corolarul IV.26. Verificăm condiţia (IV.23). Fie $\omega \subset\subset I$, $u \in \mathcal{F}$ şi $|h| < \operatorname{dist}(\omega, I^c)$. Conform propoziţiei VIII.3 (iii) avem

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \le |h| \|u'\|_{L^1(I)} \le |h|.$$

Deci

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q \, dx \le (2\|u\|_{L^\infty(I)})^{q-1} \int_\omega |u(x+h) - u(x)| \, dx \le C|h|.$$

Prin urmare

$$\left(\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q \, dx \right)^{1/q} \le C^{1/q} |h|^{1/q} < \varepsilon \qquad \text{dacă} \quad |h| < \delta.$$

Să verificăm acum (IV.24). Pentru $u \in \mathcal{F}$ avem

$$\|u\|_{L^q(I \setminus \omega)} \le \|u\|_{L^\infty(I)} |I \setminus \omega|^{1/q} \le C |I \setminus \omega|^{1/q} < \varepsilon$$

dacă $|I \setminus \omega|$ este suficient de mic; alegem ω astfel încât acest lucru să fie verificat.

Remarca 10. – Injecţia $W^{1,1}(I) \subset C(\bar{I})$ este continuă dar **niciodată** nu este compactă, chiar dacă I este un interval mărginit; încercaţi să vă convingeţi sau vezi [EX]. Totuşi, dacă (u_n) este un şir mărginit în $W^{1,1}(I)$ (cu I mărginit sau nemărginit) există un subşir (u_{n_k}) astfel încât $u_{n_k}(x)$ converge pentru **orice** $x \in I$ (aceasta este **teorema lui Helly**; vezi [EX]). Dacă I este **nemărginit** şi $1 < p \le \infty$, atunci injecţia $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ este continuă, dar nu este niciodată compactă; încercaţi să vă convingeţi sau vezi [EX]. Totuşi, dacă (u_n) este mărginit în $W^{1,p}(I)$ cu $1 < p \le \infty$, există un subşir (u_{n_k}) şi $u \in W^{1,p}(I)$ astfel încât $u_{n_k} \to u$ in $L^\infty(J)$ pentru **orice** J **mărginit**, $J \subset I$ (vezi [EX]).

Remarca 11. – Fie I un interval mărginit şi $1 \le q \le \infty$. Folosind (5) se arată cu uşurinţă că norma

$$|||u||| = \|u'\|_{L^p} + \|u\|_{L^q}$$

este echivalentă cu norma lui $W^{1,p}(I)$ (vezi [EX]).

REMARCA 12. – Fie I un interval **nemărginit**. Dacă $u \in W^{1,p}(I)$, atunci $u \in L^q(I)$ pentru orice $q \in [p, \infty]$ deoarece

$$\int_I |u|^q \leq \|u\|_{L^\infty}^{q-p} \|u\|_{L^p}^p.$$

Dar în general $u \notin L^q(I)$ pentru $q \in [1, p)$ (vezi [EX]).

Corolarul VIII.8. – Presupunem că I este un interval nemărginit şi $u \in W^{1,p}(I)$ cu $1 \leq p < \infty$. Atunci avem

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \to \infty}} u(x) = 0. \tag{9}$$

DEMONSTRAŢIE. – Conform teoremei VIII.6 există un şir (u_n) în $C_c^1(\mathbf{R})$ astfel încât $u_{n|I} \to u$ în $W^{1,p}(I)$. Deducem din (5) că $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \to 0$, de unde (9). Intr-adevăr, fiind dat $\varepsilon > 0$ alegem n suficient de mare astfel încât $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} < \varepsilon$. Pentru $|x|$ suficient de mare, $u_n(x) = 0$ (deoarece $u_n \in C_c^1(\mathbf{R})$) şi deci $|u(x)| < \varepsilon$.

• **Corolarul VIII.9 (Derivarea unui produs). – Fie $u, v \in W^{1,p}(I)$ cu $1 \leq p \leq \infty$. Atunci $uv \in W^{1,p}(I)$ ([8]) şi**

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{10}$$

In plus, are loc formula de integrare prin părţi

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv' \quad \forall x, y \in \bar{I}. \tag{11}$$

DEMONSTRAŢIE. – Observăm mai întâi că $u \in L^\infty$ (teorema VIII.7) şi deci $uv \in L^p$. Incepem cu cazul $1 \leq p < \infty$. Fie (u_n) şi (v_n) în $C_c^1(\mathbf{R})$ astfel încât $u_{n|I} \to u$ şi $v_{n|I} \to v$ în $W^{1,p}(I)$. Atunci $u_{n|I} \to u$ şi $v_{n|I} \to v$ în $L^\infty(I)$ (teorema VIII.7). Rezultă că $u_{n|I} v_{n|I} \to uv$ în $L^\infty(I)$ şi deci în $L^p(I)$. Avem

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \to u'v + uv' \quad \text{în } L^p(I).$$

[8]Observăm că acest rezultat **contrastează** cu proprietăţile funcţiilor din L^p: în general dacă $u, v \in L^p$, produsul uv **nu** aparţine lui L^p. Spunem că $W^{1,p}(I)$ este o **algebră Banach**.

Rezultă că $uv \in W^{1,p}(I)$ şi $(uv)' = u'v + uv'$. Integrând (10) obţinem (11).

Presupunem acum că $u, v \in W^{1,\infty}(I)$. Deci $uv \in L^\infty(I)$ şi $u'v+uv' \in L^\infty(I)$. Rămâne de verificat că

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Pentru aceasta, fixăm un interval deschis şi mărginit $J \subset I$ astfel încât $\operatorname{Supp} \varphi \subset J$. Deci $u, v \in W^{1,p}(J)$ pentru orice $1 \le p < \infty$ şi, din cele de mai sus, ştim că

$$\int_J uv\varphi' = -\int_J (u'v + uv')\varphi,$$

adică

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi.$$

Corolarul VIII.10 (Derivarea unei compuneri de funcţii). – Fie $G \in C^1(\mathbf{R})$ astfel încât $G(0) = 0$ ([9]). Fie $u \in W^{1,p}(I)$. Atunci

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \qquad \textbf{şi } (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Demonstraţie. – Fie $M = \|u\|_{L^\infty}$. Deoarece $G(0) = 0$ există o constantă C astfel încât $|G(s)| \le C|s|$ pentru orice $s \in [-M, +M]$. Rezultă că $G \circ u \in L^p(I)$ întrucât $|G \circ u| \le C|u|$. In mod similar, $(G' \circ u)u' \in L^p(I)$. Rămâne de verificat că

$$\int_I (G \circ u)\varphi' = -\int_I (G' \circ u)u'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I). \tag{12}$$

Presupunem mai întâi că $1 \le p < \infty$. Atunci există un şir (u_n) în $C_c^\infty(\mathbf{R})$ astfel încât $u_{n|I} \to u$ în $W^{1,p}(I)$ şi în $L^\infty(I)$. Deci $G \circ u_{n|I} \to G \circ u$ în $L^\infty(I)$ şi $(G' \circ u_n)u'_{n_{|I}} \to (G' \circ u)u'$ în $L^p(I)$. Dar

$$\int_I (G \circ u_n)\varphi' = -\int_I (G' \circ u_n)u_n'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

De aici deducem (12). Pentru cazul $p = \infty$ procedăm ca în demonstraţia corolarului VIII.9.

[9] Această restricţie este inutilă dacă I este mărginit [sau dacă I este nemărginit şi $p = \infty$]. Ea este esenţială dacă I este nemărginit şi $1 \le p < \infty$.

Spaţiile Sobolev $W^{m,p}(I)$.

Definiţie. – Fiind date un întreg $m \geq 2$ şi un număr real $1 \leq p \leq \infty$ definim prin inducţie spaţiile

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I);\ u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

Fie

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

Este uşor de verificat că $u \in W^{m,p}(I)$ dacă şi numai dacă există m funcţii $g_1,\ g_2, \ldots,\ g_m \in L^p(I)$ astfel încât

$$\int_I u\ D^j\varphi = (-1)^j \int_I g_j\varphi \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(I), \quad \forall j = 1, 2, \ldots, m$$

unde $D^j\varphi$ reprezintă a j-a derivată a lui φ. Dacă $u \in W^{m,p}(I)$ putem considera deci derivatele succesive ale lui u : $u' = g_1$, $(u')' = g_2, \ldots,$ până la ordinul m. Acestea sunt notate cu Du, $D^2u, \ldots, D^m u$. Spaţiul $W^{m,p}(I)$ este înzestrat cu norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

iar spaţiul $H^m(I)$ este înzestrat cu produsul scalar

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} = \int_I uv + \sum_{\alpha=1}^{m} \int_I D^\alpha u\ D^\alpha v.$$

Se poate arăta că norma $\|\ \|_{W^{m,p}}$ este echivalentă cu norma

$$|||u||| = \|u\|_{L^p} + \|D^m u\|_{L^p}.$$

Mai precis, se stabileşte că dacă $1 \leq j \leq m-1$, atunci $\forall\varepsilon > 0\ \exists C$ (depinzând de ε şi de $|I| \leq \infty$) astfel încât

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq \varepsilon\|D^m u\|_{L^p} + C\|u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{m,p}(I)$$

(vezi [EX]).

Cititorul poate extinde la spaţiile $W^{m,p}$ toate proprietăţile demonstrate pentru $W^{1,p}$; de exemplu, dacă I este mărginit, $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\bar{I})$ cu injecţie continuă, (resp. injecţie compactă pentru $1 < p \leq \infty$).

VIII.3 Spaţiul $W_0^{1,p}(I)$

Definiţie. – Fiind dat $1 \leq p < \infty$, notăm cu $W_0^{1,p}(I)$ închiderea lui $C_c^1(I)$ în $W^{1,p}(I)$. Notăm $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$ ([10]).

Spaţiul $W_0^{1,p}(I)$ este înzestrat cu norma indusă de $W^{1,p}(I)$; spaţiul H_0^1 este înzestrat cu produsul scalar din H^1.

Spaţiul $W_0^{1,p}$ este un spaţiu Banach separabil; el este reflexiv pentru $1 < p < \infty$. Spaţiul H_0^1 este un spaţiu Hilbert separabil.

Remarca 13. – Dacă $I = \mathbf{R}$ ştim că $C_c^1(\mathbf{R})$ este dens în $W^{1,p}(\mathbf{R})$ (vezi teorema VIII.6) şi deci $W_0^{1,p}(\mathbf{R}) = W^{1,p}(\mathbf{R})$.

Remarca 14. – Folosind un şir regularizant (ρ_n) se verifică cu uşurinţă că

(i) $C_c^\infty(I)$ este dens în $W_0^{1,p}(I)$.

(ii) dacă $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$ atunci $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Rezultatul următor oferă o caracterizare esenţială a funcţiilor din $W_0^{1,p}(I)$:

• **Teorema VIII.11. – Fie** $u \in W^{1,p}(I)$**. Atunci** $u \in W_0^{1,p}(I)$ **dacă şi numai dacă** $u = 0$ **pe** ∂I.

Remarca 15. – Teorema VIII.11 explică rolul important jucat de spaţiul $W_0^{1,p}(I)$. Intr-adevăr, ecuaţiile diferenţiale (sau cu derivate parţiale) sunt adesea cuplate cu **condiţii la limită**, adică valoarea lui u este prescrisă pe ∂I.

Demonstraţie. – Dacă $u \in W_0^{1,p}(I)$, există un şir (u_n) în $C_c^1(I)$ astfel încât $u_n \to u$ în $W^{1,p}(I)$. Deci $u_n \to u$ uniform pe $\bar{I}$ şi, în consecinţă, $u = 0$ pe ∂I.

Reciproc, fie $u \in W^{1,p}(I)$ astfel încât $u = 0$ pe ∂I. Fixăm o funcţie $G \in C^1(\mathbf{R})$ astfel încât

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } |t| \leq 1 \\ t & \text{dacă } |t| \geq 2 \end{cases}$$

[10] Când nu există pericol de confuzie vom scrie $W_0^{1,p}$ şi H_0^1 în loc de $W_0^{1,p}(I)$ şi $H_0^1(I)$.

şi

$$|G(t)| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Fie $u_n = (1/n)G(nu)$, deci $u_n \in W^{1,p}(I)$ (corolarul VIII.10). Pe de altă parte,

$$\operatorname{Supp} u_n \subset \left\{ x \in I;\ |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

şi deci $\operatorname{Supp} u_n$ este un compact inclus în I (se utilizează faptul că $u = 0$ pe ∂I şi $u(x) \to 0$ dacă $|x| \to \infty$, $x \in I$). Prin urmare, $u_n \in W_0^{1,p}(I)$ (vezi remarca 14). In sfârşit, se verifică cu teorema convergenţei dominate că $u_n \to u$ în $W^{1,p}(I)$. Deci $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Remarca 16. – Indicăm alte două caracterizări ale funcţiilor din $W_0^{1,p}$ (vezi [EX]):

(i) Fie $1 < p < \infty$ şi $u \in L^p(I)$. Definim

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă } x \in I \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus I. \end{cases}$$

Atunci $u \in W_0^{1,p}(I)$ dacă şi numai dacă $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbf{R})$.

(ii) Fie $1 < p < \infty$ şi $u \in L^p(I)$. Atunci $u \in W_0^{1,p}(I)$ dacă şi numai dacă există o constantă C astfel încât

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbf{R}).$$

• **Propoziţia VIII.12 (Inegalitatea lui Poincaré). – Presupunem că I este mărginit. Atunci există o constantă C (depinzând de $|I| < \infty$) astfel încât**

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I). \tag{13}$$

Cu alte cuvinte, pe $W_0^{1,p}$ cantitatea $\|u'\|_{L^p(I)}$ este o normă echivalentă cu norma din $W^{1,p}$.

Demonstraţie. – Pentru $u \in W_0^{1,p}(I)$ avem

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t)\, dt \right| \leq \|u'\|_{L^1}.$$

Deci $\|u\|_{L^\infty(I)} \le \|u'\|_{L^1(I)}$ şi (13) rezultă folosind inegalitatea lui Hölder.

Remarca 17. – Dacă I este mărginit, expresia $(u', v')_{L^2} = \int u'v'$ defineşte un produs scalar pe H_0^1 iar norma asociată – adică $\|u'\|_{L^2}$ – este echivalentă cu norma din H^1.

Remarca 18. – Fiind daţi un întreg $m \ge 2$ şi un număr real $1 \le p < \infty$, spaţiul $W_0^{m,p}(I)$ se defineşte ca fiind închiderea lui $C_c^m(I)$ în $W^{m,p}(I)$. Se arată că

$$W_0^{m,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I);\ u = Du = \ldots = D^{m-1}u = 0 \quad \text{pe } \partial I\}.$$

Este esenţial de **a face distincţia între**

$$W_0^{2,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I);\ u = Du = 0 \text{ pe } \partial I\}$$

şi

$$W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I);\ u = 0 \text{ pe } \partial I\}.$$

$\star$ **Dualul lui** $W_0^{1,p}$

Notaţie. – Spaţiul dual al lui $W_0^{1,p}(I)$ $(1 \le p < \infty)$ se notează cu $W^{-1,p'}(I)$ iar spaţiul dual al lui $H_0^1(I)$ se notează cu $H^{-1}(I)$.

Folosind remarca 1 din capitolul V, putem **identifica** L^2 **şi dualul său, dar nu putem identifica** H_0^1 **şi dualul său**. Avem incluziunile

$$H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1},$$

cu injecţii continue şi dense.

Dacă I este mărginit, avem

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'} \text{ pentru orice } 1 \le p < \infty,$$

cu injecţii continue şi dense.

Dacă I este nemărginit, avem doar

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'} \text{ pentru orice } 1 \le p \le 2$$

cu injecţii continue şi dense (vezi remarca 12).

Elementele din $W^{-1,p'}$ pot fi reprezentate cu ajutorul funcţiilor din $L^{p'}$; mai precis, avem

Propoziţia VIII.13. – Fie $F \in W^{-1,p'}(I)$**. Atunci există** $f_0\,, f_1 \in L^{p'}(I)$ **astfel încât**

$$\langle F, v\rangle = \int_I f_0 v + \int_I f_1 v' \quad \forall v \in W_0^{1,p}(I)$$

şi

$$\|F\|_{W^{-1,p'}} = \mathrm{Max}\{\|f_0\|_{L^{p'}}, \|f_1\|_{L^{p'}}\}.$$

Dacă I **este mărginit putem lua** $f_0 = 0$.

Demonstraţie. – Considerăm spaţiul produs $E = L^p(I) \times L^p(I)$ înzestrat cu norma

$$\|h\| = \|h_0\|_{L^p} + \|h_1\|_{L^p} \quad \text{unde } h = [h_0, h_1].$$

Aplicaţia $T : u \in W_0^{1,p}(I) \mapsto [u,\, u'] \in E$ este o izometrie de la $W_0^{1,p}(I)$ în E. Fie $G = T(W_0^{1,p}(I))$ înzestrat cu norma indusă de E şi $S = T^{-1} : G \to W_0^{1,p}(I)$. Aplicaţia $h \in G \mapsto \langle F, Sh\rangle$ este o funcţională liniară şi continuă pe G. Conform teoremei lui Hahn-Banach, putem prelungi G la o funcţională liniară şi continuă Φ definită pe E cu $\|\Phi\|_{E'} = \|F\|_{W^{-1,p'}}$. Folosind teorema de reprezentare a lui Riesz, există f_0, $f_1 \in L^{p'}(I)$ astfel încât

$$\langle \Phi, h\rangle = \int_I f_0 h_0 + \int_I f_1 h_1 \quad \forall h = [h_0, h_1] \in E.$$

Este uşor de verificat că $\|\Phi\|_{E'} = \mathrm{Max}\{\|f_0\|_{L^{p'}}, \|f_1\|_{L^{p'}}\}$.

Dacă I este **mărginit**, spaţiul $W_0^{1,p}(I)$ poate fi înzestrat cu norma $\|u'\|_{L^p}$ (vezi propoziţia VIII.12). Repetăm raţionamentul precedent cu $E = L^p(I)$ şi $T : u \in W_0^{1,p} \mapsto u' \in L^p$.

Remarca 19. – Funcţiile f_0 şi f_1 nu sunt unice.

Remarca 20. – De obicei elementul $F \in W^{-1,p'}(I)$ se identifică cu distribuţia $f_0 - f_1'$ (prin definiţie, distribuţia $f_0 - f_1'$ este funcţionala liniară $v \mapsto \displaystyle\int_I f_0 v + \int_I f_1 v'$ pe $C_c^\infty(I)$).

Remarca 21. – Concluzia propoziţiei VIII.13 rămâne valabilă pentru funcţionale liniare şi continue pe $W^{1,p}$.

VIII.4 Câteva exemple de probleme la limită

Considerăm problema

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } I = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

unde f este o funcţie dată (de exemplu în $C(\bar{I})$ sau, mai general, în $L^2(I)$). **Condiţia la limită** $u(0) = u(1) = 0$ se numeşte **condiţie Dirichlet** (omogenă).

Definiţie. – O **soluţie clasică** a problemei (14) este o funcţie $u \in C^2(\bar{I})$ care verifică (14) (în sens uzual). O **soluţie slabă** a lui (14) este o funcţie $u \in H_0^1(I)$ care satisface

$$\text{(15)} \qquad \int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Să "punem în mişcare" programul descris în §VIII.1.

Pasul A. – **Orice soluţie clasică este o soluţie slabă**. Acest lucru este evident conform formulei de integrare prin părţi din corolarul VIII.9.

Pasul B. – **Existenţa şi unicitatea soluţiei slabe**:

• **Propoziţia VIII.14.** – **Pentru orice $f \in L^2(I)$, există şi este unic $u \in H_0^1(I)$ soluţie a lui (15). In plus u se obţine prin**

$$\boxed{\mathrm{Min}_{v \in H_0^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\};}$$

acesta este principiul lui Dirichlet.

Demonstraţie. – Aplicăm teorema lui Lax-Milgram (sau teorema de reprezentare Riesz-Fréchet) în spaţiul Hilbert $H = H_0^1(I)$ cu forma biliniară

$$a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv = (u,v)_{H^1}$$

şi cu funcţionala liniară $\varphi : v \mapsto \displaystyle\int_I fv$.

REMARCA 22. – Fiind dat $F \in H^{-1}$ ştim din teorema lui Riesz-Fréchet că există $u \in H_0^1(I)$ astfel încât

$$(u, v)_{H^1} = \langle F, v\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \quad \forall v \in H_0^1.$$

Operatorul $F \mapsto u$ este izomorfismul Riesz-Fréchet de la H^{-1} în H_0^1. Putem considera că u este soluţia generalizată a ecuaţiei $-u'' + u = F$.

Paşii C şi D. – Regularitatea soluţiei slabe şi reîntoarcerea la soluţia clasică

Observăm mai întâi că dacă $f \in L^2$ şi $u \in H_0^1$ este o soluţie slabă a lui (14), atunci $u \in H^2$. Intr-adevăr, avem

$$\int u'v' = \int (f - u)v \quad \forall v \in C_c^1(I)$$

şi deci $u' \in H^1$ (din definiţia lui H^1 şi deoarece $f - u \in L^2$). Dacă, în plus, $f \in C(\bar{I})$, atunci soluţia slabă u aparţine lui $C^2(\bar{I})$. Intr-adevăr, $(u')' \in C(\bar{I})$ şi deci $u' \in C^1(\bar{I})$ (vezi remarca 6). Trecerea de la o soluţie slabă $u \in C^2(\bar{I})$ la o soluţie clasică se face ca în §VIII.1.

REMARCA 23. – Dacă $f \in H^k(I)$, cu k întreg ≥ 1, se verifică cu uşurinţă (prin inducţie) că soluţia u a lui (15) aparţine lui $H^{k+2}(I)$.

Metoda descrisă mai sus este extrem de flexibilă şi se adaptează la o multitudine de probleme. Indicăm câteva exemple întâlnite mai frecvent. **In fiecare problemă este esenţial să se precizeze spaţiul funcţional în care se lucrează**.

Exemplul 1. (Condiţie Dirichlet neomogenă). – Fie problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } I = (0, 1), \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta, \end{cases} \tag{16}$$

cu $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ date şi f o funcţie dată.

• Propoziţia VIII.15. – Fiind date $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi $f \in L^2(I)$, există o unică funcţie $u \in H^2(I)$ care satisface (16). In plus, u se obţine prin

$$\operatorname{Min}_{\substack{v \in H^1(I) \\ v(0)=\alpha, v(1)=\beta}} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\}.$$

Dacă, în plus, $f \in C(\bar{I})$ **atunci** $u \in C^2(\bar{I})$.

DEMONSTRAŢIE. – Indicăm două abordări diferite.

Metoda 1. – Fixăm o funcţie netedă u_0 astfel încât $u_0(0) = \alpha$ şi $u_0(1) = \beta$ ([11]). Introducem ca necunoscută $\tilde{u} = u - u_0$. Atunci $\tilde{u}$ satisface

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' + \tilde{u} = f + u_0'' - u_0 \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0. \end{cases}$$

Am redus aşadar problema la cazul precedent pentru $\tilde{u}$.

Metoda 2. – In spaţiul $H^1(I)$ definim mulţimea convexă şi închisă

$$K = \{v \in H^1(I);\ v(0) = \alpha \text{ şi } v(1) = \beta\}.$$

Dacă u este o soluţie clasică a lui (16) avem

$$\int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) = \int_I f(v-u) \quad \forall v \in K.$$

Deci, în particular,

$$\int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) \geq \int_I f(v-u) \quad \forall v \in K. \tag{17}$$

Folosim acum teorema lui Stampacchia (teorema V.6): există o unică funcţie $u \in K$ care satisface (17); în plus, u se obţine prin

$$\mathrm{Min}_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\}.$$

Pentru a "regăsi" o soluţie clasică alegem în (17) $v = u \pm w$ cu $w \in H_0^1$ şi obţinem

$$\int_I u'w' + \int_I uw = \int_I fw \quad \forall w \in H_0^1.$$

Aceasta implică $u \in H^2(I)$ etc.

$\star$ **Exemplul 2**. (Problema Sturm-Liouville). – Fie problema

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \quad \text{în } I = (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

[11] Alegem, de exemplu, u_0 funcţie afină.

unde $p \in C^1(\bar{I})$, $q \in C(\bar{I})$ şi $f \in L^2(I)$ sunt funcţii date, cu

$$p(x) \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in \bar{I}.$$

Dacă u este soluţie clasică a lui (18) atunci

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Folosim $H_0^1(I)$ ca spaţiu funcţional şi

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I quv$$

ca formă biliniară, continuă şi simetrică. Dacă $q \geq 0$ pe I această formă este coercivă, conform inegalităţii lui Poincaré (propoziţia VIII.12). Deci (teorema lui Lax-Milgram), există şi este unic $u \in H_0^1$ astfel încât

$$a(u,v) = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

In plus, u se obţine prin

$$\mathrm{Min}_{v \in H_0^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (pv'^2 + qv^2) - \int_I fv \right\}.$$

Este evident că $pu' \in H^1$; deci $u' = (1/p)(pu') \in H^1$, adică $u \in H^2$. In sfârşit, dacă $f \in C(\bar{I})$, atunci $pu' \in C^1(\bar{I})$ şi $u' \in C^1(\bar{I})$. Deci $u \in C^2(\bar{I})$ şi u este soluţie clasică a lui (18).

Considerăm acum problema mai generală

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f & \text{în } I = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Ipotezele asupra lui p, q şi f sunt aceleaşi ca mai sus şi $r \in C(\bar{I})$. Dacă u este o soluţie clasică a lui (19) atunci

$$\int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1.$$

Folosim $H_0^1(I)$ ca spaţiu funcţional şi

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv$$

ca formă biliniară şi continuă. Această formă **nu este simetrică**. In anumite cazuri ea este coercivă: de exemplu, dacă $q \geq 1$ şi $r^2 \leq \alpha$ sau dacă $q \geq 1$ şi $r \in C^1(\bar{I})$ cu $|r'| \leq 2$ – aici folosim faptul că

$$\int_I rv'v = -\frac{1}{2}\int_I r'v^2 \quad \forall v \in H_0^1.$$

Putem aplica în acest caz teorema lui Lax-Milgram dar nu există o problemă de minimizare asociată. Indicăm un artificiu care permite să revenim la o formă biliniară simetrică. Introducem o primitivă R a lui r/p şi fie $\zeta = e^{-R}$. După înmulţirea cu ζ ecuaţia (19) devine

$$-\zeta pu'' - \zeta p'u' + \zeta ru' + \zeta qu = \zeta f$$

sau (deoarece $\zeta' p + \zeta r = 0$):

$$-(\zeta pu')' + \zeta qu = \zeta f.$$

Definim pe $H_0^1(I)$ forma biliniară, continuă şi **simetrică**

$$a(u, v) = \int_I \zeta pu'v' + \int_I \zeta quv.$$

Dacă $q \geq 0$, această formă este **coercivă**. Deci există $u \in H_0^1(I)$ astfel încât

$$a(u, v) = \int_I \zeta fv \quad \forall v \in H_0^1.$$

In plus, u se obţine prin

$$\text{Min}_{v \in H_0^1(I)} \left\{ \frac{1}{2}\int_I (\zeta pv'^2 + \zeta qv^2) - \int_I \zeta fv \right\}.$$

Se verifică uşor că $u \in H^2(I)$ iar dacă $f \in C(\bar{I})$ atunci $u \in C^2(\bar{I})$ este soluţie clasică a lui (19).

Exemplul 3. (Condiţie Neumann omogenă). – Considerăm problema

$$\text{(20)} \qquad \begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } I = (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

• **Propoziţia VIII.16. – Pentru orice $f \in L^2(I)$ există o unică funcţie $u \in H^2(I)$ care verifică (20) ([12]). In plus u se obţine prin**

$$\mathrm{Min}_{v\in H^1(I)} \left\{ \frac{1}{2}\int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\}.$$

Dacă, în plus, $f \in C(\bar{I})$ atunci $u \in C^2(\bar{I})$.

Demonstraţie. – Dacă u este o soluţie clasică a lui (20) atunci

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H^1(I). \tag{21}$$

Este deci convenabil să lucrăm în spaţiul Hilbert $H^1(I)$ şi **nu** în $H_0^1(I)$ **ca mai sus** (insistăm că $u(0)$ şi $u(1)$ sunt a priori **necunoscute**). Aplicăm teorema lui Lax-Milgram cu forma biliniară $a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv$ şi cu funcţionala liniară $\varphi : v \mapsto \int_I fv$. In acest fel obţinem o soluţie unică $u \in H^1(I)$ a lui (21). Deducem mai întâi din (21) că $u \in H^2(I)$ şi apoi că

$$\int_I (-u'' + u - f)v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0 \quad \forall v \in H^1(I). \tag{22}$$

In (22) începem prin a alege $v \in H_0^1(I)$ şi obţinem $-u'' + u = f$ a.p.t. Revenind apoi la (22) găsim

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0 \quad \forall v \in H^1(I).$$

Deoarece $v(0)$ şi $v(1)$ sunt arbitrare, deducem că $u'(0) = u'(1) = 0$.

Exemplul 4. (Condiţie Neumann neomogenă). – Fie problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } I = (0,1), \\ u'(0) = \alpha, \ u'(1) = \beta \end{cases} \tag{23}$$

cu $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ date şi f o funcţie dată.

[12]Observăm că $u \in H^2(I) \Rightarrow u \in C^1(\bar{I})$ şi deci **condiţia** $u'(0) = u'(1) = 0$ **are sens. Ea nu ar avea sens dacă am şti doar că $u \in H^1$.**

Propoziţia VIII.16'. – Pentru orice $f \in L^2(I)$ şi orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ există o unică funcţie $u \in H^2(I)$ care verifică (23). In plus, u se obţine prin

$$\text{Min}_{v \in H^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv + \alpha v(0) - \beta v(1) \right\}.$$

Demonstraţie. – Dacă u este o soluţie clasică a lui (23) atunci

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1) \quad \forall v \in H^1(I). \tag{24}$$

Este convenabil să folosim $H^1(I)$ ca spaţiu funcţional şi să aplicăm teorema lui Lax-Milgram cu forma biliniară $a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv$ şi funcţionala liniară

$$\varphi : v \mapsto \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1).$$

Această funcţională liniară este continuă (conform teoremei VIII.7). Procedăm apoi ca în exemplul 3 pentru a arăta că $u'(0) = \alpha$, $u'(1) = \beta$.

Exemplul 5. (Condiţii la limită mixte). – Considerăm problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{în } I = (0,1), \\ u(0) = 0, u'(1) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Dacă u este o soluţie clasică a lui (25) atunci

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H^1(I) \text{ cu } v(0) = 0. \tag{26}$$

Este convenabil să lucrăm în spaţiul Hilbert

$$H = \{v \in H^1(I); v(0) = 0\}.$$

Continuarea programului este lăsată cititorului.

Exemplul 6. (A "treia" condiţie la limită). – Considerăm problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{în } I = (0,1), \\ u'(0) - ku(0) = 0, \ u(1) = 0, \end{cases} \tag{27}$$

unde $k \in \mathbf{R}$ este dată ([13]). Dacă u este o soluţie clasică a lui (27) atunci

$$\int_I u'v' + \int_I uv + ku(0)v(0) = \int_I fv \quad \forall v \in H^1(I) \text{ cu } v(1) = 0.$$

Este convenabil să aplicăm teorema lui Lax-Milgram în spaţiul Hilbert

$$H = \{v \in H^1(I); v(1) = 0\}$$

cu forma biliniară, continuă, simetrică

$$a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv + ku(0)v(0).$$

Această formă este coercivă dacă $k \geq 0$ ([14]).

Exemplul 7. (Condiţii la limită periodice). – Fie problema

$$\text{(28)} \qquad \begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } I = (0,1), \\ u(0) = u(1), u'(0) = u'(1). \end{cases}$$

Dacă u este soluţie clasică a lui (28) avem

$$\text{(29)} \qquad \int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H^1(I) \quad \text{cu } v(0) = v(1).$$

Este convenabil aşadar să aplicăm teorema lui Lax-Milgram în spaţiul Hilbert

$$H = \{v \in H^1(I);\ v(0) = v(1)\}$$

cu forma biliniară $a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv$. Dacă $f \in L^2(I)$ obţinem o soluţie $u \in H^2(I)$ a lui (28). Dacă, în plus, $f \in C(\bar{I})$ atunci această soluţie este clasică.

[13] Mai general, putem considera condiţia pe frontieră

$$\alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = 0,\ \alpha_1 u'(1) + \beta_1 u(1) = 0.$$

[14] Dacă $k < 0$ cu $|k|$ suficient de mic forma $a(u,v)$ continuă să fie coercivă. Din contră, un calcul explicit arată că există o valoare negativă a lui k şi funcţii f pentru care (27) nu are soluţii (vezi [EX]).

Exemplul 8. (Probleme la limită pe $\mathbf{R}$). – Fie problema

$$(30)\qquad \begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } \mathbf{R} \\ u(x) \to 0 & \text{dacă } |x| \to \infty, \end{cases}$$

cu $f \in L^2(\mathbf{R})$.

O **soluţie clasică** a lui (30) este o funcţie $u \in C^2(\mathbf{R})$ verificând (30) în sens uzual. O **soluţie slabă** a lui (30) este o funcţie $u \in H^1(\mathbf{R})$ care satisface

$$(31)\qquad \int_{\mathbf{R}} u'v' + \int_{\mathbf{R}} uv = \int_{\mathbf{R}} fv \quad \forall v \in H^1(\mathbf{R}).$$

Arătăm mai întâi că dacă u este o soluţie clasică a lui (30) atunci u este o soluţie slabă a lui (30). Intr-adevăr, să verificăm pentru început că $u \in H^1(\mathbf{R})$. Alegem un şir regularizant (ζ_n) ca în demonstraţia teoremei VIII.6 (formula (4)). Inmulţind (30) cu $\zeta_n u$ şi integrând prin părţi obţinem

$$\int_{\mathbf{R}} u'(\zeta_n u' + \zeta_n' u) + \int_{\mathbf{R}} \zeta_n u^2 = \int_{\mathbf{R}} \zeta_n f u.$$

De aici deducem că

$$(32)\qquad \int_{\mathbf{R}} \zeta_n (u'^2 + u^2) = \int_{\mathbf{R}} \zeta_n f u + \frac{1}{2} \int \zeta_n'' u^2.$$

Dar

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \zeta_n'' u^2 \leq \frac{C}{n^2} \int_{n<|x|<2n} u^2 \quad \text{cu } C = \|\zeta''\|_{L^\infty(\mathbf{R})}$$

şi $\displaystyle\frac{1}{n^2} \int_{n<|x|<2n} u^2 \to 0$ dacă $n \to \infty$ deoarece $u(x) \to 0$ dacă $|x| \to \infty$. Rezultă că $u \in H^1(\mathbf{R})$ (observăm că $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \zeta_n f u \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \zeta_n u^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \zeta_n f^2$ şi se trece la limită în (32) cu $n \to \infty$). In sfârşit, dacă u este o soluţie clasică a lui (30) atunci

$$\int_{\mathbf{R}} u'v' + \int_{\mathbf{R}} uv = \int_{\mathbf{R}} fv \quad \forall v \in C_c^1(\mathbf{R})$$

şi, prin densitate, $\forall v \in H^1(\mathbf{R})$; deci u este soluţie slabă a lui (30).

Pentru a obţine existenţa şi unicitatea soluţiei slabe este suficient să aplicăm teorema lui Lax-Milgram în spaţiul Hilbert $H^1(\mathbf{R})$. Se verifică uşor că soluţia slabă u aparţine lui $H^2(\mathbf{R})$ şi, în plus, dacă $f \in C(\mathbf{R})$ atunci $u \in C^2(\mathbf{R})$.

Concluzie: fiind dat $f \in L^2(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$, există o unică soluţie clasică a problemei (30) (care, în plus, aparţine lui $H^2(\mathbf{R})$).

REMARCA 24. – Problema

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{în } \mathbf{R} \\ u(x) \to 0 & \text{dacă } |x| \to \infty \end{cases}$$

nu poate fi abordată cu tehnica precedentă deoarece forma biliniară $a(u,v) = \int_{\mathbf{R}} u'v'$ **nu este coercivă** în $H^1(\mathbf{R})$.

REMARCA 25. – Cu aceeaşi metodă de mai sus se poate rezolva problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{în } I = (0,\infty) \\ u(0) = 0 & \text{şi } u(x) \to 0 \text{ dacă } |x| \to \infty. \end{cases}$$

cu $f \in L^2(0, +\infty)$ funcţie dată.

VIII.5 Principiul de maxim

Fie $I = (0,1)$. Avem

• **Teorema VIII.17.** – **Fie** $f \in L^2(I)$ **şi fie** $u \in H^2(I)$ **soluţia problemei Dirichlet**

(33)
$$\begin{cases} -u'' + u = f & \textbf{în } I \\ u(0) = \alpha, \ u(1) = \beta. \end{cases}$$

Atunci avem ([15])

(34)
$$\text{Min}\{\alpha, \beta, \text{Inf}_I f\} \le u(x) \le \text{Max}\{\alpha, \beta, \text{Sup}_I f\} \qquad \forall x \in I.$$

[15] Sup f şi Inf f reprezintă respectiv Sup ess al lui f (eventual $= +\infty$) şi Inf ess al lui f (eventual $= -\infty$). Reamintim că Sup ess f = Inf $\{C; f(x) \le C$ a.p.t.$\}$ şi Inf ess $f = -$Sup ess $(-f)$.

DEMONSTRAŢIE. – (Metoda troncaturilor a lui Stampacchia). Avem

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{35}$$

Fixăm $G \in C^1(\mathbf{R})$ astfel încât

(i) G este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$,

(ii) $G(t) = 0$ pentru $t \in (-\infty, 0]$.

Fie $K = \operatorname{Max}\{\alpha, \beta, \operatorname{Sup} f\}$ şi presupunem $K < \infty$. Vom arăta că $u \leq K$ a.p.t. în I. Fie $v = G(u - K)$; ştim că $v \in H^1(I)$ şi chiar $v \in H_0^1(I)$ deoarece

$$u(0) - K = \alpha - K \leq 0 \quad \text{şi} \quad u(1) - K = \beta - K \leq 0.$$

Inlocuind v în (35) obţinem

$$\int_I u'^2 G'(u-K) + \int_I uG(u-K) = \int_I fG(u-K),$$

adică

$$\int_I u'^2 G'(u-K) + \int_I (u-K)G(u-K) = \int_I (f-K)G(u-K).$$

Dar $(f - K) \leq 0$ şi $G(u - K) \geq 0$, de unde rezultă că

$$\int_I (u-K)G(u-K) \leq 0$$

şi deoarece $tG(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$, inegalitatea precedentă implică $(u - K)G(u-K) = 0$ a.p.t. In consecinţă, $u \leq K$ a.p.t. Incheiem demonstraţia lui (34) schimbând u cu $-u$.

REMARCA 26. – Dacă $f \in C(\bar{I})$, atunci $u \in C^2(\bar{I})$ şi se poate stabili (34) cu o metodă diferită. Fie $x_0 \in \bar{I}$ punctul în care u îşi atinge maximul pe $\bar{I}$. Dacă $x_0 = 0$ sau dacă $x_0 = 1$ concluzia este evidentă. In caz contrar, $0 < x_0 < 1$ şi atunci $u'(x_0) = 0$, $u''(x_0) \leq 0$. Din (33) rezultă că

$$u(x_0) = f(x_0) + u''(x_0) \leq f(x_0) \leq K$$

şi deci $u \leq K$ pe I. Această metodă are avantajul de a se extinde la probleme Sturm-Liouville generale.

Deducem câteva consecinţe imediate ale teoremei VIII.17:

• **Corolarul VIII.18. – Fie u o soluţie a lui (33).**

(i) **Dacă** $u \geq 0$ **pe** ∂I **şi dacă** $f \geq 0$ **în** I**, atunci** $u \geq 0$ **în** I**.**

(ii) **Dacă** $u = 0$ **pe** ∂I **şi dacă** $f \in L^\infty(I)$**, atunci** $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|f\|_{L^\infty(I)}$.

(iii) **Dacă** $f = 0$ **în** I**, atunci** $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial I)}$.

Avem un rezultat comparabil pentru condiţia Neumann:

Propoziţia VIII.19. – Fie $f \in L^2(I)$ **şi fie** $u \in H^2(I)$ **soluţia problemei**

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \textbf{în } I, \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Atunci

$$\mathrm{Inf}_I f \leq u(x) \leq \mathrm{Sup}_I f \qquad \forall x \in \bar{I}. \tag{36}$$

Demonstraţie. – Avem

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H^1(I). \tag{37}$$

Inlocuim $v = G(u - K)$ în (37), unde $K = \mathrm{Sup}_I f$. Procedăm apoi ca în demonstraţia teoremei VIII.17.

Remarca 27. – Dacă $f \in C(\bar{I})$, atunci $u \in C^2(\bar{I})$ şi putem stabili (36) ca în remarca 26. Observăm că dacă u îşi atinge maximul pe ∂I, să zicem în 0, atunci $u''(0) \leq 0$ (se prelungeşte u prin reflexie la stânga lui 0).

Remarca 28. – Presupunem că $I = \mathbf{R}$. Fie $f \in L^2(\mathbf{R})$ şi fie $u \in H^2(\mathbf{R})$ soluţia problemei

$$-u'' + u = f \quad \text{în } \mathbf{R}.$$

Atunci

$$\mathrm{Inf}_{\mathbf{R}} f \leq u(x) \leq \mathrm{Sup}_{\mathbf{R}} f \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

(vezi [EX]).

VIII.6 Funcţii proprii şi descompunere spectrală

Fie $I = (0, 1)$. Avem

• **Teorema VIII.20.** – **Fie** $p \in C^1(\bar{I})$ **cu** $p \geq \alpha > 0$ **în** I **şi** $q \in C(\bar{I})$**. Atunci există un şir** $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ **de numere reale şi o bază Hilbertiană** $(e_n)_{n\geq 1}$ **a lui** $L^2(I)$ **astfel încât** $e_n \in C^2(\bar{I})$ **şi**

$$(38) \qquad \begin{cases} -(pe_n')' + qe_n = \lambda_n e_n & \textbf{în } I \\ e_n(0) = e_n(1) = 0. \end{cases}$$

In plus, $\lambda_n \to +\infty$ **dacă** $n \to +\infty$.

Spunem că (λ_n) sunt **valori proprii** ale operatorului diferenţial $Au = -(pu')' + qu$ cu condiţii Dirichlet şi că (e_n) sunt **funcţiile proprii** asociate.

Demonstraţie. – Putem presupune $q \geq 0$, dacă nu, alegem o constantă C astfel încât $q + C \geq 0$, ceea ce revine la a înlocui λ_n cu $\lambda_n + C$ în ecuaţia (38). Pentru orice $f \in L^2(I)$ există şi este unic $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ care verifică

$$(39) \qquad \begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{în } I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Notăm cu T operatorul $f \mapsto u$ **considerat ca operator de la** $L^2(I)$ **în** $L^2(I)$ ([16]).

Verificăm că T este autoadjunct şi compact. Avem, conform (39),

$$\int_I pu'^2 + \int qu^2 = \int_I fu$$

şi deci $\alpha\|u'\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$. Rezultă că $\|u\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2}$, unde C este o constantă care depinde doar de α. Prin urmare

$$\|Tf\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2} \quad \forall f \in L^2(I).$$

[16] Am putea, de asemenea, privi T ca pe un operator de la H_0^1 în H_0^1 (vezi §IX.8).

Cum injecţia de la $H^1(I)$ în $L^2(I)$ este compactă (deoarece I este **mărginit**) deducem că T este un operator compact de la $L^2(I)$ în $L^2(I)$. Arătăm acum că T este autoadjunct, adică

$$\int_I (Tf)g = \int_I f(Tg) \quad \forall f, g \in L^2(I).$$

Intr-adevăr, punând $u = Tf$ şi $v = Tg$, avem

$$-(pu')' + qu = f \tag{40}$$

şi

$$-(pv')' + qv = g. \tag{41}$$

Inmulţind (40) cu v şi (41) cu u şi integrând, obţinem

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv = \int_I gu.$$

Să notăm în final că

$$\int_I (Tf)f = \int_I uf = \int_I pu'^2 + qu^2 \geq 0 \quad \forall f \in L^2(I) \tag{42}$$

şi, pe de altă parte, că $N(T) = \{0\}$ deoarece $Tf = 0$ implică $u = 0$ şi deci $f = 0$.

Conform teoremei VI.11, $L^2(I)$ admite o bază Hilbertiană $(e_n)_{n\geq 1}$ formată din vectori proprii ai lui T asociaţi valorilor proprii $(\mu_n)_{n\geq 1}$. Avem $\mu_n > 0$ (într-adevăr, $\mu_n \geq 0$ conform (42) şi $\mu_n \neq 0$ deoarece $N(T) = \{0\}$). Mai ştim că $\mu_n \to 0$.

Scriind $Te_n = \mu_n e_n$ obţinem

$$-(pe_n')' + qe_n = \lambda_n e_n \quad \text{unde } \lambda_n = 1/\mu_n$$

In sfârşit, observăm că $e_n \in C^2(\bar{I})$ deoarece $f = \lambda_n e_n \in C(\bar{I})$ (de fapt, $e_n \in C^\infty(\bar{I})$ dacă p, $q \in C^\infty(\bar{I})$)).

Exemplu. – Dacă $p \equiv 1$ şi $q \equiv 0$ obţinem

$$e_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x) \quad \text{şi } \lambda_n = n^2\pi^2,\ n = 1, 2, \ldots.$$

REMARCA 29. – **Pentru acelaşi operator diferenţial, valorile proprii şi funcţiile proprii depind de condiţiile la limită**. Cu titlu de exerciţiu, se pot determina valorile proprii ale operatorului $Au = -u''$ cu condiţiile la limită din exemplele 3, 5, 6 şi 7.

REMARCA 30. – Ipoteza că I este **mărginit** a intervenit în mod esenţial pentru a stabili **compacitatea** operatorului T. Dacă I este nemărginit concluzia teoremei VIII.20 este în general falsă ([17]); întâlnim atunci fenomenul foarte interesant al **spectrului continuu**, vezi Reed-Simon [1]. Cu titlul de exerciţiu se pot determina valorile proprii şi spectrul operatorului $T : f \mapsto u$ unde $u \in H^2(\mathbf{R})$ este soluţie a ecuaţiei $-u'' + u = f$ în $\mathbf{R}$ (T este un operator mărginit şi autoadjunct de la $L^2(\mathbf{R})$ în $L^2(\mathbf{R})$, dar el nu este compact); vezi [EX].

VIII.7 Comentarii asupra capitolului VIII

1) Câteva inegalităţi

Semnalăm câteva inegalităţi foarte utile legate de normele Sobolev.

A) Inegalitatea lui Poincaré-Wirtinger

Fie I un interval dat. Fiind dat $u \in L^1(I)$, punem $\bar{u} = \dfrac{1}{|I|}\displaystyle\int_I u$ (aceasta este media lui u pe I). Avem

$$\|u - \bar{u}\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^1} \quad \forall u \in W^{1,1}(I)$$

(vezi [EX]).

B) Inegalitatea lui Hardy

Fie $I = (0,1)$ şi $u \in W_0^{1,p}(I)$ cu $1 < p < \infty$. Atunci $\dfrac{u(x)}{x(1-x)} \in L^p(I)$ şi, în plus,

$$\left\| \frac{u(x)}{x(1-x)} \right\|_{L^p} \leq C_{L^p} \|u'\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I)$$

(vezi [EX]).

C) Inegalităţile de interpolare Gagliardo-Nirenberg

Fie I un interval mărginit şi $1 \leq r \leq \infty$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Atunci există o constantă C astfel încât

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{L^q}^{1-a} \|u\|_{W^{1,r}}^a \quad \forall u \in W^{1,r}(I) \tag{43}$$

[17] In anumite circumstanţe concluzia teoremei VIII.20 rămâne adevărată (vezi [EX]).

unde $0 \leq a \leq 1$ este definit prin $a\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1\right) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$; vezi [EX].

Din inegalitatea (43) deducem în particular că dacă $p < \infty$ (sau dacă $p = \infty$ dar $r > 1$), atunci

$$(44) \qquad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \; \exists C_\varepsilon \quad \text{astfel încât} \\ \|u\|_{L^p} \leq \varepsilon \|u\|_{W^{1,r}} + C_\varepsilon \|u\|_{L^q} \quad \forall u \in W^{1,r}(I). \end{cases}$$

(Putem stabili (44) şi printr-o **"metodă de compacitate"**; vezi [EX]).

Inegalităţi mai generale se pot găsi în Nirenberg [1] (vezi, de asemenea, Friedman [2] sau [EX]). Notăm, între altele inegalitatea

$$\|u'\|_{L^p} \leq C \|u\|_{W^{2,r}}^{1/2} \|u\|_{L^q}^{1/2} \quad \forall u \in W^{2,r}(I)$$

unde p este **media armonică** a lui q şi r, adică $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)$.

2) Operatori Hilbert-Schmidt

Fie I un interval mărginit. Se arată că operatorul $T : f \mapsto u$ care asociază fiecărui f din $L^2(I)$ unica soluţie u a problemei

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \quad \text{în } I = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(cu $p \geq \alpha > 0$ şi $q \geq 0$) este un operator Hilbert-Schmidt de la $L^2(I)$ în $L^2(I)$; vezi [EX].

3) Proprietăţi spectrale

Se cunosc numeroase proprietăţi spectrale ale operatorului Sturm-Liouville $Au = -(pu')' + qu$ cu condiţie Dirichlet pe I. Printre altele, ştim că:

A) fiecare valoare proprie are multiplicitatea 1: de aceea spunem că fiecare valoare proprie este **simplă**.

B) dacă aranjăm valorile proprii (λ_n) într-un şir crescător, atunci funcţia proprie $e_n(x)$ corespunzătoare lui λ_n posedă exact $(n-1)$ rădăcini în $(0,1)$; în particular, **prima funcţie proprie** $e_1(x)$ **are semn constant pe** $(0,1)$.

C) câtul $\dfrac{\lambda_n}{n^2}$ converge când $n \to \infty$ la o limită pozitivă.

Referitor la aceste probleme se pot consulta lucrările Weinberger [1], Protter-Weinberger [1], Coddington-Levinson [1], Hartman [1] şi Agmon [1].

Capitolul IX

SPAŢII SOBOLEV ŞI FORMULAREA VARIAŢIONALĂ A PROBLEMELOR LA LIMITĂ ELIPTICE ÎN DIMENSIUNE N

IX.1 Definiţia şi proprietăţile elementare ale spaţiilor Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un deschis şi fie $p \in \mathbf{R}$ cu $1 \leq p \leq \infty$.

Definiţie. – **Spaţiul Sobolev** $W^{1,p}(\Omega)$ se defineşte prin ([1])

$$\boxed{W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \quad \text{astfel încât} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \\ \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N \end{array} \right\}.}$$

Fie

$$\boxed{H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).}$$

Pentru $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definim $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ ([2]) şi scriem

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

[1] Când nu există pericol de confuzie vom scrie $W^{1,p}$ în loc de $W^{1,p}(\Omega)$.
[2] Această definiţie are sens: g_i este unic conform lemei IV.2.

Spaţiul $W^{1,p}(\Omega)$ este înzestrat cu norma

$$\boxed{\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}}$$

sau uneori cu norma echivalentă $\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p}$ (dacă $1 \le p < \infty$).

Spaţiul $H^1(\Omega)$ este înzestrat cu produsul scalar

$$\boxed{(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}}$$

cu norma asociată

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

care este echivalentă cu norma din $W^{1,2}$.

• **Propoziţia IX.1. – Spaţiul $W^{1,p}(\Omega)$ este un spaţiu Banach pentru $1 \le p \le \infty$; $W^{1,p}(\Omega)$ este reflexiv pentru $1 < p < \infty$ şi este separabil pentru $1 \le p < \infty$.**

Spaţiul $H^1(\Omega)$ este un spaţiu Hilbert separabil.

Demonstraţie. – Se adaptează demonstraţia propoziţiei VIII.1 (folosind operatorul $Tu = [u, \nabla u]$).

Remarca 1. – In definiţia lui $W^{1,p}$ se poate utiliza ca spaţiu de funcţii test fie $C_c^\infty(\Omega)$ fie $C_c^1(\Omega)$ (pentru a demonstra acest lucru se foloseşte un şir regularizant (ρ_n)).

Remarca 2. – Este clar că dacă $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ şi $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, N$ (aici $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ semnifică derivata parţială uzuală a lui u), atunci $u \in W^{1,p}(\Omega)$. In plus, derivatele parţiale în sens uzual coincid cu derivatele parţiale în sens $W^{1,p}$. In particular, dacă Ω este **mărginit**, atunci $C^1(\bar{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$ pentru orice $1 \le p \le \infty$. Reciproc, se demonstrează că dacă $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ cu $1 \le p \le \infty$ şi dacă

$\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega)$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, N$ (aici $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ reprezintă derivata parţială în sens $W^{1,p}$), atunci $u \in C^1(\Omega)$ (vezi [EX]).

$\star$ Remarca 3. – Fie $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$; **teoria distribuţiilor** permite să se dea un sens expresiei $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ($\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ este un element al "uriaşului" spaţiu al distribuţiilor $\mathcal{D}'(\Omega)$, spaţiu care conţine în particular $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$). Utilizând limbajul distribuţiilor putem spune că $W^{1,p}(\Omega)$ este mulţimea funcţiilor $u \in L^p(\Omega)$ astfel încât toate derivatele parţiale $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \le i \le N$ (în sensul distribuţiilor) aparţin lui $L^p(\Omega)$.

Dacă $\Omega = \mathbf{R}^N$ şi $p = 2$ se pot defini spaţiile Sobolev folosind şi transformata Fourier; vezi de exemplu Lions-Magenes [1], Goulaouic [1] sau Malliavin [1]. Nu vom folosi acest punct de vedere în cele ce urmează.

Remarca 4. – Este convenabil de reţinut următoarele aspecte:

a) Fie (u_n) un şir din $W^{1,p}$ astfel încât $u_n \to u$ în L^p şi (∇u_n) converge către o anumită limită în $(L^p)^N$. Atunci $u \in W^{1,p}$ şi $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$. Dacă $1 < p \le \infty$ este suficient să ştim că $u_n \to u$ în L^p şi (∇u_n) este **mărginit** în $(L^p)^N$ pentru a deduce că $u \in W^{1,p}$.

b) Fiind dată o funcţie f definită pe Ω notăm cu $\bar{f}$ prelungirea sa cu 0 în afara lui Ω, adică

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in \Omega \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ şi $\alpha \in C^1_c(\Omega)$. Atunci ([3])

$$\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\alpha u}) = \overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u}.$$

Intr-adevăr, fie $\varphi \in C^1_c(\mathbf{R}^N)$; avem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} \overline{\alpha u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_\Omega \alpha u \frac{\partial \varphi}{\partial x_I} = \int_\Omega u \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha\varphi) - \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\varphi \right] \\ &= -\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\alpha\varphi + u\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\varphi \right) = -\int_{\mathbf{R}^N} \overline{\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u \right)} \varphi. \end{aligned}$$

[3] Atenţie, în general $\bar{u} \notin W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ (de ce?).

Aceeaşi concluzie rămâne valabilă dacă, în loc să presupunem că $\alpha \in C_c^1(\Omega)$, luăm $\alpha \in C^1(\mathbf{R}^N) \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$ cu $\nabla\alpha \in (L^\infty(\mathbf{R}^N))^N$ şi $\operatorname{Supp}\alpha \subset \mathbf{R}^N \setminus (\partial\Omega)$.

Iată un prim rezultat de densitate; vom stabili ulterior (corolarul IX.8) un rezultat mai precis cu ipoteze suplimentare asupra lui Ω.

• **Teorema IX.2 (Friedrichs). – Fie** $u \in W^{1,p}(\Omega)$ **cu** $1 \leq p < \infty$. **Atunci există un şir** (u_n) **în** $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ **astfel încât**

$$u_{n|\Omega} \to u \quad \textbf{în } L^p(\Omega) \tag{1}$$

şi

$$\nabla u_{n|\omega} \to \nabla u_{|\omega} \ \textbf{ în } (L^p(\omega))^N \textbf{ pentru orice } \omega \subset\subset \Omega. \tag{2}$$

(Reamintim că notaţia $\omega \subset\subset \Omega$ semnifică faptul că ω este un deschis astfel încât $\overline{\omega} \subset \Omega$ şi $\overline{\omega}$ este compactă).

In demonstraţie vom utiliza

Lema IX.1. – Fie $\rho \in L^1(\mathbf{R}^N)$ **şi** $v \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ **cu** $1 \leq p \leq \infty$. **Atunci**

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \quad \textbf{şi} \ \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * v) = \rho * \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, ..., N.$$

Demonstraţia lemei IX.1. – Se adaptează demonstraţia lemei VIII.4.

Demonstraţia teoremei IX.2. – Notăm

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă } x \in \Omega \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

şi punem $v_n = \rho_n * \bar{u}$ (unde ρ_n este un şir regularizant). Ştim (vezi §IV.4) că $v_n \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ şi $v_n \to \bar{u}$ în $L^p(\mathbf{R}^N)$. Arătăm că $\nabla v_{n|\omega} \to \nabla u_{|\omega}$ în $(L^p(\omega))^N$ pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$. Intr-adevăr, fiind dat $\omega \subset\subset \Omega$, **fixăm** o funcţie $\alpha \in C_c^1(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, astfel încât $\alpha = 1$ într-o vecinătate a lui ω (o asemenea funcţie există; vezi de exemplu [EX]). Observăm că pentru n suficient de mare avem

$$\rho_n * (\overline{\alpha u}) = \rho_n * \bar{u} \quad \text{în } \omega. \tag{3}$$

Intr-adevăr

$$\operatorname{Supp}(\rho_n * \overline{\alpha u} - \rho_n * \bar{u}) = \operatorname{Supp}[\rho_n * (1-\bar{\alpha})\bar{u}]$$

$$\subset \operatorname{Supp}\rho_n + \operatorname{Supp}(1-\bar{\alpha})\bar{u} \subset B\left(0, \frac{1}{n}\right) + \operatorname{Supp}(1-\bar{\alpha}) \subset \omega^c$$

pentru n suficient de mare. De aici rezultă (3).

Din lema IX.1 şi remarca 4b) avem

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) = \rho_n * \left(\overline{\alpha\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}u}\right).$$

Rezultă că

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \to \overline{\alpha\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}u} \quad \text{în } L^p(\mathbf{R}^N).$$

In particular

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{în } L^p(\omega)$$

şi, conform (3),

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \bar{u}) \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{în } L^p(\omega).$$

In final, se realizează o "troncatură" a şirului (v_n) ca în demonstraţia teoremei VIII.6. Mai precis, punem $u_n = \zeta_n v_n$ ([4]). Se verifică cu uşurinţă că şirul (u_n) are proprietăţile dorite, adică $u_n \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, $u_n \to u$ în $L^p(\Omega)$ şi $\nabla u_n \to \nabla u$ în $(L^p(\omega))^N$ pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$.

$\star$ Remarca 5. – Se demonstrează (teorema Meyers-Serrin) că dacă $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \le p < \infty$, atunci există un şir (u_n) din $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ astfel încât $u_n \to u$ în $W^{1,p}(\Omega)$; demonstraţia acestui rezultat este destul de delicată (vezi, de exemplu, Adams[1] sau Friedman [2]). In

[4]De acum încolo vom nota **sistematic** prin (ζ_n) un şir de **troncatură**, adică se fixează o funcţie $\zeta \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ cu $0 \le \zeta \le 1$ şi

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } |x| \le 1 \\ 0 & \text{dacă } |x| \ge 2 \end{cases}$$

şi punem $\zeta_n(x) = \zeta\left(\dfrac{x}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$

general, dacă Ω este un deschis **arbitrar** şi dacă $u \in W^{1,p}(\Omega)$ atunci nu se poate construi un şir (u_n) în $C_c^1(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_{n|\Omega} \to u$ în $W^{1,p}(\Omega)$ (vezi [EX]). A se compara teorema lui Meyers-Serrin (valabilă pentru un deschis arbitrar Ω) cu corolarul IX.8 (care presupune că Ω este neted).

Iată o caracterizare simplă a funcţiilor din $W^{1,p}$:

Propoziţia IX.3. – Fie $u \in L^p(\Omega)$ cu $1 < p \leq \infty$. Proprietăţile următoare sunt echivalente:
(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$,
(ii) **există o constantă C astfel încât**

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots N,$$

(iii) **există o constantă C astfel încât pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$ şi orice $h \in \mathbf{R}^N$ cu $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \ \partial\Omega)$ avem**

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

(In plus, se poate lua $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ în (ii) şi (iii).)

$\star$ Remarca 6. – Dacă $p = 1$ implicaţiile următoare rămân valabile:

$$(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii).$$

Funcţiile care satisfac (ii) [sau (iii)] cu $p = 1$ se numesc **funcţii cu variaţie mărginită** (în limbajul teoriei distribuţiilor, este vorba de funcţii din L^1 ale căror derivate de ordinul întâi în sensul distribuţiilor sunt măsuri mărginite). Acest spaţiu joacă un rol **mai important** decât spaţiul $W^{1,1}$; întâlnim funcţii cu variaţie mărginită (sau de aceeaşi natură) în teoria **suprafeţelor minimale** (vezi de exemplu e.g. Giusti [1] şi lucrările citate ale lui DeGiorgi, Miranda etc.), în probleme de **plasticitate** (funcţii cu deformaţie mărginită, vezi Temam-Strang [2] şi lucrarea citată a lui Suquet), în ecuaţiile **cvasiliniare de ordinul întâi** care admit **soluţii discontinue** sau **unde de şoc** (vezi, de exemplu, Volpert [1]).

$\star$ Remarca 7. – Rezultă din teorema IV.25 şi din propoziţia IX.3 că dacă $\mathcal{F}$ reprezintă bila unitate din $W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \leq p \leq \infty$ (Ω deschis arbitrar), atunci $\mathcal{F}_{|\omega}$ este relativ compactă în $L^p(\omega)$ pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$. [Vom vedea ulterior (teorema IX.16 că dacă Ω este **mărginit** şi **neted**, atunci $\mathcal{F}$ este relativ compactă în $L^p(\Omega)$; această concluzie poate fi falsă dacă Ω este nemărginit sau dacă Ω nu este neted]. Rezultă că dacă (u_n) este un şir mărginit în $W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \le p \le \infty$ şi Ω este un deschis arbitrar, atunci se poate extrage un subşir (u_{n_k}) astfel încât $u_{n_k}(x)$ converge a.p.t. în Ω (vezi [EX]).

Demonstraţie. –

$(i) \Rightarrow (ii)$. Evident.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Se procedează ca în demonstraţia propoziţiei VIII.3.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Incepem prin a presupune că $u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$. Fie $h \in \mathbf{R}^N$ şi definim

$$v(t) = u(x+th), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Atunci $v'(t) = h \cdot \nabla u(x+th)$ şi deci

$$u(x+h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)\,dt = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x+th)\,dt.$$

Prin urmare

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \le |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p\,dt$$

şi

$$\begin{aligned}\int_\omega |\tau_h u(x) - u(x)|^p\,dx &\le |h|^p \int_\omega dx \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p\,dt\\ &= |h|^p \int_0^1 dt \int_\omega |\nabla u(x+th)|^p\,dx\\ &= |h|^p \int_0^1 dt \int_{\omega+th} |\nabla u(y)|^p\,dy.\end{aligned}$$

Fixând $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$, există un deschis $\omega' \subset\subset \Omega$ astfel încât $\omega + th \subset \omega'$ pentru orice $t \in [0,1]$ şi deci

$$\|\tau_h u - u\|^p_{L^p(\omega)} \le |h|^p \int_{\omega'} |\nabla u|^p. \tag{4}$$

Presupunem acum că $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \le p < \infty$. Fie (u_n) în $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_n \to u$ în $L^p(\Omega)$ şi $\nabla u_n \to \nabla u$ în $(L^p(\omega))^N$, $\forall \omega \subset\subset \Omega$. Aplicăm inegalitatea (4) lui (u_n) şi, prin trecere la limită, obţinem (iii).

Dacă $p = \infty$, aplicăm cele de mai sus (pentru $p < \infty$) şi apoi facem $p \to \infty$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Fie $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Considerăm un deschis ω astfel încât $\operatorname{Supp}\varphi \subset \omega \subset\subset \Omega$. Fie $h \in \mathbf{R}^N$ cu $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega^c)$. Din (iii) rezultă că

$$\left|\int_\Omega (\tau_h u - u)\varphi\right| \leq C|h|\,\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Pe de altă parte, din

$$\int_\Omega (u(x+h) - u(x))\varphi(x)\,dx = \int_\Omega u(y)(\varphi(y-h) - \varphi(y))\,dy$$

rezultă că

$$\left|\int_\Omega u(y)\frac{(\varphi(y-h) - \varphi(y))}{|h|}\,dy\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Alegând $h = te_i$, $t \in \mathbf{R}$, şi trecând la limită când $t \to 0$ obţinem (ii).

$\star$ REMARCA 8. – Propoziţia IX.3 ($(i) \Rightarrow (iii)$) arată că dacă $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ şi Ω este un deschis **conex**, atunci

$$(5) \qquad |u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \operatorname{dist}_\Omega(x,y) \quad \text{a.p.t. } x, y \in \Omega$$

unde $\operatorname{dist}_\Omega(x,y)$ reprezintă **distanţa geodezică** între x şi y în Ω; rezultă de aici că u admite un reprezentant continuu care verifică (5) pentru orice $x, y \in \Omega$. Deducem că dacă $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \leq p \leq \infty$, Ω este un deschis oarecare şi $\nabla u = 0$ a.p.t. în Ω, atunci u este constantă pe fiecare componentă conexă a lui Ω.

Observăm în sfârşit că dacă $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, unde Ω este un deschis **convex**, atunci

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty}\, |x - y| \qquad \forall x, y \in \Omega.$$

Propoziţia IX.4 (Derivarea unui produs). – Fie u, $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ **cu** $1 \leq p \leq \infty$. **Atunci** $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ **şi**

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

DEMONSTRAŢIE. – Putem întotdeauna să ne situăm în cazul $1 \leq p < \infty$ (vezi demonstraţia corolarului VIII.9).

Conform teoremei IX.2 există şirurile (u_n), (v_n) în $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât

$$u_n \to u,\ v_n \to v \quad \text{în } L^p(\Omega) \text{ şi a.p.t. în } \Omega,$$

$$\nabla u_n \to \nabla u,\ \nabla v_n \to \nabla v \quad \text{în } (L^p(\omega))^N \text{ pentru orice } \omega \subset\subset \Omega.$$

Reluând demonstraţia teoremei IX.2 observăm cu uşurinţă că avem, în plus,

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \le \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ şi } \|v_n\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \le \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Pe de altă parte,

$$\int_\Omega u_n v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_n + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right) \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Trecând la limită, folosind teorema convergenţei dominate, avem

$$\int_\Omega uv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Propoziţia IX.5 (Derivarea unei compuneri de funcţii). – Fie $G \in C^1(\mathbf{R})$ astfel încât $G(0) = 0$ şi $|G'(s)| \le M \quad \forall s \in \mathbf{R}$. Fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \le p \le \infty$, atunci

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \textbf{şi} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

Demonstraţie. – Avem $|G(s)| \le M|s| \quad \forall s \in \mathbf{R}$ şi deci $|G \circ u| \le M|u|$; prin urmare $G \circ u \in L^p(\Omega)$ şi, de asemenea, $(G' \circ u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$. Rămâne de verificat că

$$(6) \qquad \int_\Omega (G \circ u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Dacă $1 \le p < \infty$, alegem un şir (u_n) în $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_n \to u$ în $L^p(\Omega)$ şi a.p.t. în Ω, $\nabla u_n \to \nabla u$ în $(L^p(\omega))^N$, $\forall \omega \subset\subset \Omega$ (teorema IX.2). Avem

$$\int_\Omega (G \circ u_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (G' \circ u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Dar $G \circ u_n \to G \circ u$ în $L^p(\Omega)$ şi $(G' \circ u_n)\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \to (G' \circ u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ în $L^p(\omega)$, $\forall \omega \subset\subset \Omega$ (prin convergenţă dominată). De aici rezultă (6).

Dacă $p = \infty$, fixăm un deschis Ω' astfel încât $\operatorname{Supp}\varphi \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Atunci $u \in W^{1,p}(\Omega')$ $\forall p < \infty$ şi (6) rezultă din cele de mai sus.

Propoziţia IX.6 (Formula de schimbare de variabilă). – Fie Ω şi Ω' două mulţimi deschise în $\mathbf{R}^N$ şi $H : \Omega' \to \Omega$ o aplicaţie bijectivă, $x = H(y)$, astfel încât

$$H \in C^1(\Omega'), \quad H^{-1} \in C^1(\Omega), \quad \operatorname{Jac} H \in L^\infty(\Omega'), \quad \operatorname{Jac} H^{-1} \in L^\infty(\Omega)\ (^5).$$

Fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \le p \le \infty$, atunci $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ şi

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ H)(y) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y))\frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, N.$$

Demonstraţie. – Dacă $1 \le p < \infty$, alegem un şir (u_n) în $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_n \to u$ în $L^p(\Omega)$ şi $\nabla u_n \to \nabla u$ în $(L^p(\omega))^N$, $\forall \omega \subset\subset \Omega$. Deci $u_n \circ H \to u \circ H$ în $L^p(\Omega')$ şi

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \circ H\right)\frac{\partial H_i}{\partial y_j} \to \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \circ H\right)\frac{\partial H_i}{\partial y_j} \quad \text{în } L^p(\omega') \quad \forall \omega' \subset\subset \Omega'.$$

Fiind dată $\psi \in C_c^1(\Omega')$ avem

$$\int_{\Omega'} (u_n \circ H)\frac{\partial \psi}{\partial y_j}\, dy = -\int_{\Omega'} \sum_i \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \circ H\right)\frac{\partial H_i}{\partial y_j}\psi\, dy.$$

Prin trecere la limită obţinem rezultatul dorit.

Dacă $p = \infty$, se procedează ca la sfârşitul demonstraţiei propoziţiei IX.5.

Spaţiile $W^{m,p}(\Omega)$

Fie $m \ge 2$ un întreg şi p un număr real cu $1 \le p \le \infty$. Definim prin recurenţă

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{m-1,p}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N\right\}.$$

---

[5] $\operatorname{Jac} H$ semnifică matricea Jacobiană $\dfrac{\partial H_i}{\partial y_j}$; deci este vorba de o funcţie din $(L^\infty(\Omega'))^{N\times N}$.

Alternativ, aceste spaţii pot fi introduse prin ([6])

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\alpha \text{ cu } |\alpha| \le m,\ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ astfel încât} \\ \displaystyle\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

Notăm $D^\alpha u = g_\alpha$.

Spaţiul $W^{m,p}(\Omega)$ înzestrat cu norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

este un spaţiu Banach.

Punem $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $H^m(\Omega)$ înzestrat cu produsul scalar

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

este un spaţiu Hilbert.

$\star$ Remarca 9. – Se demonstrează că dacă Ω este "suficient de neted" cu $\Gamma = \partial\Omega$ mărginită, atunci norma lui $W^{m,p}(\Omega)$ este echivalentă cu norma

$$\|u\|_{L^p} + \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Mai precis, se arată că pentru orice multi-indice α cu $0 < |\alpha| < m$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există o constantă C (depinzând de Ω, ε, α) astfel încât

$$\|D^\alpha u\|_{L^p} \le \varepsilon \sum_{|\beta| = m} \|D^\beta u\|_{L^p} + C\|u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega)$$

(vezi Adams [1] sau [EX]).

[6] Un multi-indice α este un şir $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ cu $\alpha_i \ge 0$ număr întreg; punem

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad \text{şi} \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \varphi.$$

IX.2 Operatori de prelungire

Este adesea comod să stabilim proprietăţi ale funcţiilor din $W^{1,p}(\Omega)$ începând cu cazul $\Omega = \mathbf{R}^N$ (vezi de exemplu rezultatele din §IX.3). Este deci util să ştim să prelungim o funcţie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ la o funcţie $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$. Acest lucru nu este totdeauna posibil. Totuşi dacă deschisul Ω este "**neted**" putem construi o asemenea prelungire. Incepem prin a preciza noţiunea de deschis neted.

Notaţie. – Fiind dat $x \in \mathbf{R}^N$ scriem

$$x = (x', x_N) \quad \text{cu } x' \in \mathbf{R}^{N-1},\ x' = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$$

şi punem

$$|x'| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Notăm

$\mathbf{R}^N_+ = \{x = (x',\, x_N);\, x_N > 0\}$,
$Q = \{x = (x',\, x_N);\, |x'| < 1 \text{ şi } |x_N| < 1\}$,
$Q_+ = Q \cap \mathbf{R}^N_+$,
$Q_0 = \{x = (x', 0);\, |x'| < 1\}$.

Definiţie. – Spunem că un deschis Ω este de **clasă** C^1 dacă pentru orice $x \in \partial\Omega = \Gamma$ există o vecinătate U a lui x în $\mathbf{R}^N$ şi o aplicaţie bijectivă $H : Q \to U$ astfel încât

$$H \in C^1(\bar{Q}),\ H^{-1} \in C^1(\bar{U}),\ H(Q_+) = U \cap Q \ \text{ şi } \ H(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

H se numeşte o **hartă locală**.

Teorema IX.7. – Presupunem că Ω este de clasă C^1 cu Γ mărginită (sau $\Omega = \mathbf{R}^N_+$). Atunci există un operator de prelungire

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$$

astfel încât, pentru orice $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

(*i*) $Pu_{|\Omega} = u$,
(*ii*) $\|Pu\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \le C\|u\|_{L^p(\Omega)}$,
(*iii*) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^N)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

unde C depinde doar de Ω.

Incepem prin a demonstra o lemă simplă, dar fundamentală, privind *prelungirea prin reflexie.*

Lema IX.2. – Fiind dată $u \in W^{1,p}(Q_+)$ cu $1 \le p \le \infty$ definim funcţia u^* ca fiind prelungirea prin reflexie pe Q după cum urmează

$$u^*(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N) & \textbf{dacă } x_N > 0, \\ u(x', -x_N) & \textbf{dacă } x_N < 0. \end{cases}$$

Atunci $u^* \in W^{1,p}(Q)$ şi

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \le 2\|u\|_{L^p(Q_+)}, \qquad \|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \le 2\|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.$$

Demonstraţie. – Verificăm că

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^* \text{ pentru } 1 \le i \le N-1 \tag{7}$$

şi

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_N} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{\square}, \tag{8}$$

unde $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^*$ reprezintă prelungirea prin a reflexie a lui $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ şi unde punem, pentru f definită pe Q_+,

$$f^{\square}(x', x_N) = \begin{cases} f(x', x_N) & \text{dacă } x_N > 0, \\ -f(x', x_N) & \text{dacă } x_N < 0. \end{cases}$$

Vom folosi şirul de funcţii (η_k) în $C^\infty(\mathbf{R})$ definit prin

$$\eta_k(t) = \eta(kt),\ t \in \mathbf{R},\ k = 1, 2, \ldots$$

unde η este o funcţie **fixată**, $\eta \in C^\infty(\mathbf{R})$, astfel încât

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t < \dfrac{1}{2}, \\ 1 & \text{dacă } t > 1. \end{cases}$$

Pentru a demonstra (7), fie $\varphi \in C_c^1(Q)$. Pentru $1 \le i \le N-1$, avem

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \tag{9}$$

unde

$$\psi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N).$$

Funcţia ψ nu aparţine în general lui $C_c^1(Q_+)$ şi deci nu poate fi utilizată ca funcţie test, dar pe de altă parte,

$$\eta_k(x_N)\psi(x', x_N) \in C_c^1(Q_+)$$

şi deci

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k \psi) = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \psi.$$

Deoarece $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k \psi) = \eta_k \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}$, avem

$$\int_{Q_+} u \eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \psi. \tag{10}$$

Trecând la limită în (10) cu $k \to \infty$ (prin convergenţă dominată) obţinem

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi. \tag{11}$$

Combinând (9) şi (11) avem

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi = -\int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^* \varphi,$$

de unde rezultă (7).

Pentru a demonstra (8), fie $\varphi \in C_c^1(Q)$. Avem

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} = \int_{Q_+} u \frac{\partial \chi}{\partial x_N} \tag{12}$$

unde $\chi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N)$. Observăm că $\chi(x', 0) = 0$ şi deci există o constantă M astfel încât $|\chi(x', x_N)| \le M|x_N|$ în Q. Deoarece $\eta_k \chi \in C_c^1(Q_+)$ avem

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k \chi) = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \eta_k \chi. \tag{13}$$

Dar

$$\frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k\chi) = \eta_k\frac{\partial\chi}{\partial x_N} + k\eta'(kx_N)\chi. \tag{14}$$

Arătăm că

$$\int_{Q_+} uk\eta'(kx_N)\chi \to 0 \quad \text{dacă } k \to \infty. \tag{15}$$

Intr-adevăr, avem

$$\left|\int_Q uk\eta'(kx_N)\chi\right| \le kMC\int_{0<x_N<1/k} |u|x_N\,dx \le MC\int_{0<x_N<1/k} |u|\,dx$$

cu $C = \text{Sup}_{t\in[0,1]}|\eta'(t)|$, de unde rezultă (15).

Din (13), (14) şi (15) deducem că

$$\int_{Q_+} u\frac{\partial\chi}{\partial x_N} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\chi.$$

In final, avem

$$\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\chi = \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{\square} \varphi. \tag{16}$$

Combinând (12) şi (16) obţinem (8).

Concluzia lemei IX.2 rămâne valabilă dacă înlocuim Q_+ cu $\mathbf{R}^N_+$ (demonstraţia este neschimbată) – ceea ce stabileşte teorema IX.7 pentru $\Omega = \mathbf{R}^N_+$.

⋆ Remarca 10. – Lema IX.2 oferă o construcţie foarte simplă a operatorilor de prelungire pentru anumiţi deschişi Ω care nu sunt de clasă C^1. Coinsiderăm, de exemplu,

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2;\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}.$$

Fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$. După patru reflexii succesive obţinem o prelungire $\tilde{u} \in W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ a lui u în

$$\tilde{\Omega} = \{x \in \mathbf{R}^2;\ -1 < x_1 < 3,\ -1 < x_2 < 3\}.$$

Fixăm apoi o funcţie $\psi \in C_c^1(\tilde{\Omega})$ astfel încât $\psi = 1$ în Ω. Notăm cu Pu funcţia $\psi\tilde{u}$ prelungită la $\mathbf{R}^2$ cu 0 în afara lui $\tilde{\Omega}$. Se arată cu uşurinţă că operatorul $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbf{R}^2)$ satisface (i), (ii) şi (iii).

Vom utiliza în cele ce urmează

Lema IX.3 (Partiţia unităţii). – Fie Γ un compact din $\mathbf{R}^N$ şi $U_1, U_2, \dots, U_k$ mulţimi deschise astfel încât $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$.

Atunci există funcţiile $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât

(i) $\quad 0 \le \theta_i \le 1 \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, k$ **şi** $\sum_{i=0}^{k} \theta_i =$ **1 în $\mathbf{R}^N$,**

$$(ii) \quad \begin{cases} \operatorname{Supp} \theta_i \text{ este compact şi } \operatorname{Supp} \theta_i \subset U_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \\ \operatorname{Supp} \theta_0 \subset \mathbf{R}^N \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Dacă Ω este o mulţime deschisă şi mărginită şi $\Gamma = \partial\Omega$, atunci $\theta_{0|\Omega} \in C_c^\infty(\Omega)$.

Demonstraţie. – Vezi [EX]. Această lemă este clasică; se pot găsi enunţuri asemănătoare în Agmon [1], Adams [1], Folland [1], L. Schwartz [1], Malliavin [1].

Demonstraţia teoremei IX.7. – **"Rectificăm" $\Gamma = \partial\Omega$ prin hărţi locale şi introducem o partiţie a unităţii** (7). Mai precis, deoarece Γ este compactă şi de clasă C^1, există mulţimile deschise $(U_i)_{1 \le i \le k}$ în $\mathbf{R}^N$ astfel încât $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ şi aplicaţiile bijective $H_i : Q \to U_i$ astfel încât

$$H_i \in C^1(\bar{Q}),\ H_i^{-1} \in C^1(\bar{U}_i),\ H_i(Q_+) = U_i \cap \Omega \quad \text{şi} \quad H_i(Q_0) = U_i \cap \Gamma.$$

Considerăm funcţiile $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ introduse în lema IX.3. Fiind dat $u \in W^{1,p}(\Omega)$, scriem

$$u = \sum_{i=0}^{k} \theta_i u = \sum_{i=0}^{k} u_i \quad \text{unde } u_i = \theta_i u.$$

7 In continuare vom utiliza frecvent această tehnică pentru a trece de la un rezultat demonstrat pe $\mathbf{R}_+^N$ (sau Q_+) la aceeaşi concluzie pentru un deschis neted Ω.

Prelungim acum fiecare dintre funcţiile u_i la $\mathbf{R}^N$ distingând u_0 şi $(u_i)_{1\leq i\leq k}$.

a) Prelungirea lui u_0. – Definim prelungirea lui u_0 la $\mathbf{R}^N$ prin

$$\bar{u}_0(x)=\begin{cases} u_0(x) & \text{dacă } x\in\Omega,\\ 0 & \text{dacă } x\in\mathbf{R}^N\setminus\Omega.\end{cases}$$

Reamintim că $\theta_0\in C^1(\mathbf{R}^N)\cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$ şi $\nabla\theta_0\in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ deoarece $\nabla\theta_0=-\sum_{i=1}^{k}\nabla\theta_i$ este cu suport compact şi $\operatorname{Supp}\theta_0\subset\mathbf{R}^N\setminus\Gamma$. Rezultă (din remarca $4b$) că

$$\bar{u}_0\in W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \text{ şi } \frac{\partial}{\partial x_i}\bar{u}_0=\theta_0\overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}+\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}\bar{u}.$$

Deci

$$\|\bar{u}_0\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^N)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

b) Prelungirea lui u_i, $1\leq i\leq k$. – Considerăm restricţia lui u la $U_i\cap\Omega$ şi "transportăm" această funcţie pe Q_+ cu ajutorul lui H_i. Mai precis, fie $v_i(y)=u(H_i(y))$ pentru $y\in Q_+$. Ştim (propoziţia IX.6) că $v_i\in W^{1,p}(Q_+)$. Definim apoi pe Q prelungirea prin reflexie a lui v_i (lema IX.2), fie aceasta v_i^*. Ştim că $v_i^*\in W^{1,p}(Q)$. Apoi "retransportăm" v_i^* pe U_i folosind H_i^{-1}, fie acesta w_i:

$$w_i(x)=v_i^*[H_i^{-1}(x)] \quad \text{pentru } x\in U_i.$$

Atunci $w_i\in W^{1,p}(U_i)$, $w_i=u$ în $U_i\cap\Omega$ şi

$$\|w_i\|_{W^{1,p}(U_i)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(U_i\cap\Omega)}.$$

In final, punem pentru $x\in\mathbf{R}^N$

$$\hat{u}_i(x)=\begin{cases}\theta_i(x)w_i(x) & \text{dacă } x\in U_i,\\ 0 & \text{dacă } x\in\mathbf{R}^N\setminus U_i,\end{cases}$$

astfel că $\hat{u}_i\in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ (remarca $4b$)), $\hat{u}_i=u_i$ în Ω şi

$$\|\hat{u}_i\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^N)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(U_i\cap\Omega)}.$$

c) Concluzie. – Operatorul $Pu = \bar{u}_0 + \sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i$ are toate proprietăţile cerute.

• **Corolarul IX.8 (Densitate). – Presupunem că Ω este de clasă C^1 şi fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \leq p < \infty$. Atunci există un şir (u_n) în $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_{n|\Omega} \to u$ în $W^{1,p}(\Omega)$. Cu alte cuvinte, restricţiile la Ω ale funcţiilor din $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ formează un subspaţiu dens al lui $W^{1,p}(\Omega)$.**

Demonstraţie. – Presupunem mai întâi că Γ este **mărginită**. Atunci există un operator de prelungire P (teorema IX.7). Şirul $\zeta_n(\rho_n * Pu)$ ([8]) converge la Pu în $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ şi deci răspunde cerinţelor teoremei. Dacă Γ este **nemărginită**, începem prin a considera şirul $\zeta_n u$. Fiind dat $\varepsilon > 0$, fixăm n_0 astfel încât $\|\zeta_{n_0} u - u\|_{W^{1,p}} < \varepsilon$. Astfel putem construi o prelungire $v \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ a lui $\zeta_{n_0} u$ (deoarece singurul lucru care intervine este intersecţia lui Γ cu o bilă largă). Fabricăm apoi $w \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $\|w - v\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^N)} < \varepsilon$.

IX.3 Inegalităţile lui Sobolev

In capitolul VIII am văzut că dacă Ω este de dimensiune 1, atunci $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ cu injecţie continuă, pentru orice $1 \leq p \leq \infty$. In dimensiune $N \geq 2$ această incluziune rămâne valabilă doar dacă $p > N$; pentru $p \leq N$ putem connstrui funcţii în $W^{1,p}$ care nu aparţin lui L^∞ (vezi remarca 17 şi [EX]). Totuşi un rezultat important, datorat în mod esenţial lui Sobolev, afirmă că dacă $1 \leq p < N$ atunci $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ cu injecţie continuă, pentru un anumit $p^* \in (p, +\infty)$.

Incepem prin a considera

A) Cazul $\Omega = \mathbf{R}^N$.

• **Teorema IX.9 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg). – Fie $1 \leq p < N$. Atunci**

$$W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbf{R}^N) \quad \textbf{unde } p^* \textbf{ este dat de } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

[8] (ρ_n) este un şir regularizant şi (ζ_n) este un şir de troncatură ca în demonstraţia teoremei IX.2.

şi există o constantă $C = C(p, N)$ (9) astfel încât

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N). \tag{17}$$

REMARCA 11. – Valoarea lui p^* se poate obţine printr-un argument foarte simplu de **omogenitate** (de reţinut că argumentele prin omogenitate dau uneori informaţii interesante cu minimum de efort). Intr-adevăr, **dacă există** constantele C şi q ($1 \leq q \leq \infty$) astfel încât

$$\|u\|_{L^q} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \tag{18}$$

atunci, în mod necesar, $q = p^*$. Pentru a vedea acest lucru alegem în (18) $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ ($\lambda > 0$) în loc de u. Rezultă că

$$\|u\|_{L^q} \leq C\lambda^{(1+\frac{N}{q}-\frac{N}{p})}\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall \lambda > 0,$$

ceea ce implică $q = p^*$.

In demonstraţia teoremei IX.9 folosim

Lema IX.4. – Fie $N \geq 2$ şi $f_1, f_2, \ldots, f_N \in L^{N-1}(\mathbf{R}^{N-1})$. Pentru $x \in \mathbf{R}^N$ şi $1 \leq i \leq N$ fie

$$\tilde{x}_i = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^{N-1}.$$

Atunci funcţia

$$f(x) = f_1(\tilde{x}_1)f_2(\tilde{x}_2)\ldots f_N(\tilde{x}_N), \quad x \in \mathbf{R}^N$$

aparţine lui $L^1(\mathbf{R}^N)$ şi

$$\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbf{R}^{N-1})}.$$

DEMONSTRAŢIE. – Cazul $N = 2$ este trivial. Considerăm cazul $N = 3$. Avem

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}} |f(x)|\, dx_3 = |f_3(x_1, x_2)| \int_{\mathbf{R}} |f_1(x_2, x_3)||f_2(x_1, x_3)|\, dx_3 \\
&\leq |f_3(x_1, x_2)| \left(\int_{\mathbf{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2\, dx_3\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2\, dx_3\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

[9] Putem lua $C(p, N) = (N-1)p/(N-p)$ dar această constantă nu este optimală; cea mai bună constantă este cunoscută (şi complicată!), vezi Th. Aubin [1], Talenti [1] şi Lieb [1].

(prin Cauchy-Schwarz). Aplicând din nou inegalitatea lui Cauchy-Schwarz avem

$$\int_{\mathbf{R}^3} |f(x)|\, dx \leq \|f_3\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \|f_1\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \|f_2\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}.$$

Cazul general se obţine prin inducţie; admitem rezultatul pentru N şi îl deducem pentru $N+1$. **Fixăm** $x_{N+1} \in \mathbf{R}$; conform inegalităţii lui Hölder avem

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^N} |f(x)|\, dx_1 dx_2 \ldots dx_N \leq \\ &\|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbf{R}^N)} \left[\int |f_1 f_2 \ldots f_N|^{N'} dx_1 dx_2 \ldots dx_N\right]^{1/N'}\end{aligned}$$

(cu $N' = N/(N-1)$). Aplicând ipoteza de inducţie funcţiilor $|f_1|^{N'}, |f_2|^{N'}, \ldots, |f_N|^{N'}$ obţinem

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f_1|^{N'} \ldots |f_N|^{N'} dx_1 \ldots dx_N \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|^{N'}_{L^N(\mathbf{R}^{N-1})}.$$

De aici rezultă că

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f(x)|\, dx_1 \ldots dx_N \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbf{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbf{R}^{N-1})}.$$

Facem acum să **varieze** x_{N+1}. Fiecare dintre funcţiile $x_{N+1} \mapsto \|f_i\|_{L^N(\mathbf{R}^{N-1})}$ aparţine lui $L^N(\mathbf{R})$, $1 \leq i \leq N$. In consecinţă, produsul $\prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbf{R}^{N-1})}$ aparţine lui $L^1(\mathbf{R})$ (vezi remarca 2 ce urmează inegalităţii lui Hölder în capitolul IV) şi

$$\int_{R^{N+1}} |f(x)|\, dx_1 dx_2 \ldots dx_N dx_{N+1} \leq \prod_{i=1}^{N+1} \|f_i\|_{L^N(\mathbf{R}^N)}.$$

Demonstraţia teoremei IX.9. – Incepem cu cazul $p = 1$ şi $u \in C_c^1(\mathbf{R}^N)$. Avem

$$\begin{aligned}|u(x_1, x_2, \ldots, x_N)| &= \left|\int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_{L^2}, \ldots, x_N)\, dt\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \ldots, x_N)\right| dt\end{aligned}$$

şi, în mod similar, pentru orice $1 \le i \le N$,

$$\begin{aligned}|u(x_1, x_2, \ldots, x_N)| &\le \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots x_N) \right| dt \\ &\overset{\text{def}}{\equiv} f_i(\tilde{x}_i).\end{aligned}$$

Deci

$$|u(x)|^N \le \prod_{i=1}^N f_i(\tilde{x}_i).$$

Din lema IX.4 deducem că

$$\int_{\mathbf{R}^N} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx \le \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{L^1(\mathbf{R}^{N-1})}^{1/(N-1)} = \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}^{1/(N-1)}.$$

In consecinţă

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}(\mathbf{R}^N)} \le \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}^{1/N}. \tag{19}$$

Fie $t \ge 1$; aplicăm (19) lui $|u|^{t-1}u$ în loc de u. Obţinem

$$\|u\|_{L^{tN/(N-1)}}^t \le t \prod_{i=1}^N \left\| \, |u|^{t-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1}^{1/N} \le t\, \|u\|_{L^{p'(t-1)}}^{t-1} \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^{1/N}. \tag{20}$$

Acum **alegem** t astfel încât $tN/(N-1) = p'(t-1)$, deci
$t = (N-1)p^*/N$ ($t \ge 1$ deoarece $1 \le p < N$). Obţinem

$$\|u\|_{p^*} \le t \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^{1/N}.$$

Deci

$$\|u\|_{L^{p^*}} \le C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in C_c^1(\mathbf{R}^N).$$

Fie acum $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ şi (u_n) un şir din $C_c^1(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_n \to u$ în $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$. Putem presupune (trecând eventual la un subşir) că $u_n \to u$ a.p.t. Avem, pentru orice n

$$\|u_n\|_{L^{p^*}} \le C \|\nabla u_n\|_{L^p}.$$

Aplicând lema lui Fatou ([10]) obţinem

$$u \in L^{p^*} \text{ şi } \|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}.$$

• **Corolarul IX.10. – Fie** $1 \leq p < N$**. Atunci**

$$W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \subset L^q(\mathbf{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

cu injecţii continue.

DEMONSTRAŢIE. – Fiind dat $q \in [p, p^*]$ scriem

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*} \quad \text{cu } \alpha \in [0, 1].$$

Ştim (vezi remarca IV.2) că

$$\|u\|_{L^q} \leq \|u\|_{L^p}^{\alpha} \|u\|_{L^{p^*}}^{1-\alpha} \leq \|u\|_{L^p} + \|u\|_{L^{p^*}}$$

(din inegalitatea lui Young). Folosind teorema IX.9 obţinem

$$\|u\|_{L^q} \leq C\|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N).$$

• **Corolarul IX.11 (Cazul limită** $p = N$**). – Avem**

$$W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \subset L^q(\mathbf{R}^N) \quad \forall q \in [N, +\infty)$$

cu injecţie continuă.

DEMONSTRAŢIE. – Presupunem că $u \in C_c^1(\mathbf{R}^N)$; aplicând (20) cu $p = N$ găsim

$$\|u\|_{L^{tN/(N-1)}}^t \leq t\|u\|_{L^{(t-1)N/(N-1)}}^{t-1} \|\nabla u\|_{L^N} \quad \forall t \geq 1$$

şi, conform inegalităţii lui Young, obţinem

$$\text{(21)} \qquad \|u\|_{L^{tN/(N-1)}} \leq C\left(\|u\|_{L^{(t-1)N/(N-1)}} + \|\nabla u\|_{L^N}\right) \quad \forall t \geq 1.$$

In (21) alegem $t = N$; rezultă că

$$\|u\|_{L^{N^2/(N-1)}} \leq C\|u\|_{W^{1,N}}$$

[10] Se poate obţine aceeaşi concluzie remarcând că şirul (u_n) este un şir Cauchy în L^{p^*}.

şi, prin inegalitatea de interpolare (remarca IV.2) avem

$$\|u\|_{L^q} \leq C\|u\|_{W^{1,N}} \tag{22}$$

pentru orice $N \leq q \leq \dfrac{N^2}{N-1}$.

Reiterând acest argument cu $t = N+1$, $t = N+2$, etc., obţinem

$$\|u\|_{L^q} \leq C\|u\|_{W^{1,N}} \qquad \forall u \in C_c^1(\mathbf{R}^N) \tag{23}$$

pentru orice $q \in [N, +\infty)$, cu o constantă C care depinde de q şi N ([11]). Inegalitatea (23) se extinde prin densitate la $W^{1,N}$.

• **Teorema IX.12 (Morrey). – Fie $p > N$. Atunci**

$$W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \subset L^\infty(\mathbf{R}^N) \tag{24}$$

cu injecţii continue.

In plus, pentru orice $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$, avem

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p} \text{ a.p.t. } x, y \in \mathbf{R}^N \tag{25}$$

unde $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ şi C este o constantă (care depinde doar de p şi N).

Remarca 12. – Inegalitatea (25) implică existenţa unei funcţii $\tilde{u} \in C(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u = \tilde{u}$ a.p.t. în $\mathbf{R}^N$. [Intr-adevăr, fie $A \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime neglijabilă astfel încât (25) are loc pentru orice $x, y \in \mathbf{R}^N \setminus A$; deoarece $\mathbf{R}^N \setminus A$ este densă în $\mathbf{R}^N$, funcţia $u_{|\mathbf{R}^N \setminus A}$ admite o (unică) prelungire continuă la $\mathbf{R}^N$]. Cu alte cuvinte, orice funcţie $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ cu $p > N$ admite un **reprezentant continuu**. In continuare vom înlocui în mod sistematic u prin reprezentantul său continuu când acest lucru va fi util.

Demonstraţie. – Incepem prin a stabili (25) pentru $u \in C_c^1(\mathbf{R}^N)$. Fie Q un cub deschis care conţine 0, ale cărui laturi – de lungime r – sunt paralele cu axele de coordonate. Pentru $x \in Q$ avem

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx)\, dt$$

[11] şi care "explodează" dacă $q \to +\infty$.

şi deci

$$|u(x)-u(0)| \le \int_0^1 \sum_{i=1}^N |x_i| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt \le r \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt. \tag{26}$$

Fie

$$\bar{u} = \frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)dx = (\text{media lui } u \text{ pe } Q).$$

Integrând (26) pe Q obţinem

$$\begin{aligned}
|\bar{u}-u(0)| &\le \frac{r}{|Q|}\int_Q dx \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt \\
&= \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 dt \int_Q \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dx \\
&= \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 dt \int_{tQ} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| \frac{dy}{t^N}.
\end{aligned}$$

Dar, conform inegalităţii lui Hölder, avem

$$\int_{tQ} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| dy \le \left(\int_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)^{1/p} |tQ|^{1/p'}$$

(deoarece $tQ \subset Q$ pentru $t \in (0,1)$). Deducem de aici că

$$|\bar{u}-u(0)| \le \frac{1}{r^{N-1}}\|\nabla u\|_{L^p(Q)} r^{N/p'} \int_0^1 \frac{t^{N/p'}}{t^N}\, dt = \frac{r^{1-(N/p)}}{1-(N/p)}\|\nabla u\|_{L^p(Q)}.$$

Prin translaţie, această inegalitate rămâne valabilă pentru orice cub Q de latură r ale cărui muchii sunt paralele cu axele de coordonate. Deci

$$|\bar{u}-u(x)| \le \frac{r^{1-(N/p)}}{1-(N/p)}\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \quad \forall x \in Q. \tag{27}$$

Prin adunare (şi din inegalitatea triunghiului) obţinem

$$|u(x)-u(y)| \le \frac{2r^{1-(N/p)}}{1-(N/p)}\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \quad \forall x, y \in Q. \tag{28}$$

Pentru două puncte oarecare $x, y \in \mathbf{R}^N$ există un cub Q cu latura $r = 2|x-y|$ conţinând x şi y. Deducem de aici (25) pentru $u \in C_c^1(\mathbf{R}^N)$.

Pentru cazul general $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ folosim un şir (u_n) din $C_c^1(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_n \to u$ în $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ şi $u_n \to u$ a.p.t.

Să arătăm acum (24). Fie $u \in C_c^1(\mathbf{R}^N)$, $x \in \mathbf{R}^N$, şi Q un cub de latură $r = 1$ care conţine x. Din (27) avem

$$|u(x)| \le |\bar{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(Q)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^N)}$$

unde C depinde doar de p şi N. Deci

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^N)} \quad \forall u \in C_c^1(\mathbf{R}^N).$$

Dacă $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ folosim un şir (u_n) din $C_c^1(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_n \to u$ în $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ şi a.p.t.

Remarca 13. – Din (24) deducem că dacă $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ cu $N < p < \infty$, atunci

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Intr-adevăr, există un şir (u_n) în $C_c^1(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_n \to u$ în $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$. Conform (24), u este de asemenea limita uniformă în $\mathbf{R}^N$ a funcţiilor u_n.

• **Corolarul IX.13. – Fie** $m \ge 1$ **un întreg şi** $p \in [1, +\infty)$. **Avem**

dacă $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$ **atunci** $W^{m,p}(\mathbf{R}^N) \subset L^q(\mathbf{R}^N)$, **unde** $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}$ **,**

dacă $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$ **atunci** $W^{m,p}(\mathbf{R}^N) \subset L^q(\mathbf{R}^N) \quad \forall q \in [p, +\infty)$ **,**

dacă $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$ **atunci** $W^{m,p}(\mathbf{R}^N) \subset L^\infty(\mathbf{R}^N)$ **,**

cu injecţii continue.

In plus, dacă $m - (N/p) > 0$ **nu este număr întreg, fie**

$$k = \left[m - \frac{N}{p}\right] \ \textbf{şi} \ \ \theta = m - \frac{N}{p} - k \quad (0 < \theta < 1).$$

Avem, pentru orice $u \in W^{m,p}(\mathbf{R}^N)$,

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \le C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbf{R}^N)} \quad \forall \alpha \ \textbf{cu} \ |\alpha| \le k$$

şi ([12])

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \le C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbf{R}^N)}|x-y|^\theta \ \textbf{a.p.t.}\ \ x, y \in \mathbf{R}^N,$$
$$\forall \alpha,\ |\alpha| = k.$$

In particular $W^{m,p}(\mathbf{R}^N) \subset C^k(\mathbf{R}^N)$ **([13]).**

DEMONSTRAŢIE. – Toate aceste rezultate se obţin prin aplicarea reiterată a teoremei IX.9, a corolarului IX.11 şi a teoremei IX.12.

⋆ REMARCA 13. – Cazul $p = 1$ şi $m = N$ este destul de special: avem $W^{N,1} \subset L^\infty$. Intr-adevăr, fie $u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$; avem

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_N) =$$
$$= \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_N} \frac{\partial^N u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_N}(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_N$$

şi deci

$$\|u\|_{L^\infty} \le C\|u\|_{W^{N,1}} \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N). \tag{29}$$

Dacă $u \in W^{N,1}$ se procedează prin densitate.

Considerăm acum

B. Cazul $\Omega \subset \mathbf{R}^N$**.** – Presupunem că, fie Ω este un deschis de clasă C^1 cu Γ mărginită, fie $\Omega = \mathbf{R}^N_+$.

• **Corolarul IX.14. – Fie** $1 \le p \le \infty$**. Avem**

dacă $1 \le p < N$**, atunci** $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ **unde** $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$**,**
dacă $p = N$**, atunci** $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \ \forall q \in [p, +\infty)$**,**
dacă $p > N$**, atunci** $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$

şi toate aceste injecţii sunt continue.

[12] De aici rezultă că $|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \le C\|u\|_{W^{m,p}}|x-y|\ \forall x, y \in \mathbf{R}^N$ şi $\forall \alpha$ cu $|\alpha| < k$.

[13] Modulo un reprezentant continuu.

In plus, dacă $p > N$ avem pentru orice $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}|x - y|^{\alpha} \textbf{ a.p.t. } x, y \in \Omega,$$

cu $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ şi C depinde doar de Ω, p şi N. In particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ ([14]).

Demonstraţie. – Considerăm operatorul de prelungire

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$$

(vezi teorema IX.7) şi aplicăm apoi teorema IX.9, corolarul IX.11 şi teorema IX.12.

• **Corolarul IX.15. – Concluzia corolarului IX.13 rămâne adevărată dacă $\mathbf{R}^N$ este înlocuit cu Ω** ([15]).

Demonstraţie. – Prin aplicarea reiterată a corolarului IX.14 ([16]).

• **Teorema IX.16 (Rellich-Kondrachov). – Presupunem că Ω este mărginit şi de clasă C^1. Atunci avem:**

dacă $p < N$, atunci $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*)$ unde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$

dacă $p = N$, atunci $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty)$,

dacă $p > N$, atunci $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,

cu injecţii compacte ([17]).

Demonstraţie. – Cazul $p > N$ rezultă din corolarul IX.14 şi din teorema lui Ascoli. Cazul $p = N$ se reduce la cazul $p < N$.

---

[14]Modulo un reprezentant continuu.

[15]Precizăm că dacă $m - \frac{N}{p} > 0$ nu este un întreg, atunci

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega}) \text{ unde } k = \left[m - \frac{N}{p}\right]$$

şi $C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega);\ D^{\alpha}u$ admite o prelungire continuă pe $\overline{\Omega}$ pentru orice α cu $|\alpha| \leq k\}$

[16]S-ar putea aplica direct corolarul IX.13, dar aceasta ar necesita o ipoteză suplimentară: ar trebui ca Ω să fie de clasă C^m pentru a construi un operator de prelungire $P : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbf{R}^N)$.

[17]**In particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ cu injecţie compactă, pentru orice p.**

Presupunem deci că $p < N$. Aplicăm corolarul IX.26 cu $\mathcal{F}$ fiind bila unitate în $W^{1,p}(\Omega)$.

Verificarea lui (IV.23). – Intrucât $q \geq 1$ putem scrie

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1} + \frac{1-\alpha}{p^*} \text{ cu } \alpha \in (0,1].$$

Fie $\omega \subset\subset \Omega$, $u \in \mathcal{F}$ şi $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$. Conform inegalităţii de interpolare (remarca IV.2) avem

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq \|\tau_h u - u\|^{\alpha}_{L^1(\omega)} \|\tau_h u - u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\omega)}.$$

Dar, conform propoziţiei IX.3 avem $\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leq |h| \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$. Prin urmare

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} \leq (|h| \, \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)})^{\alpha} (2\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)})^{1-\alpha} \leq C|h|^{\alpha}$$

(se aplică inegalitatea lui Hölder şi corolarul IX.14). Deducem că $\|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} < \varepsilon$ pentru $|h|$ suficient de mic.

Verificarea lui (IV.24). – Fie $u \in \mathcal{F}$. Conform inegalităţii lui Hölder avem

$$\|u\|_{L^q(\Omega\setminus\omega)} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega\setminus\omega)} \, |\Omega \setminus \omega|^{1-\frac{q}{p^*}} < \varepsilon$$

pentru ω ales în mod convenabil ([18]).

Remarca 15. – Teorema IX.16 este “aproape optimală” în sensul următor:

(i) Dacă Ω nu este mărginit, injecţia $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ nu este compactă, în general ([19]).

(ii) Injecţia $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ nu este niciodată compactă chiar dacă Ω este mărginit şi neted (vezi [EX]).

$\star$ Remarca 16. – Fie Ω un deschis mărginit de clasă C^1. Atunci norma

$$|||u||| = \|\nabla u\|_{L^p} + \|u\|_{L^q}$$

[18]De exemplu $\omega = \{x \in \Omega;\ \operatorname{dist}(x, \Gamma) > \delta\}$ şi $\delta > 0$ suficient de mic (se aplică teorema convergenţei dominate sau teorema convergenţei monotone).

[19]Acelaşi lucru pentru anumiţi deschişi de măsură finită cu frontieră netedă (vezi Adams [1], p. 167).

este **echivalentă** cu norma $W^{1,p}$ dacă:

$1 \le q \le p^*$, în cazul $1 \le p < N$,

$1 \le q < \infty$, în cazul $p = N$,

$1 \le q \le \infty$, în cazul $p > N$

(vezi [EX]).

$\star$ Remarca 17 (cazul limită $p = N$). – Fie Ω un deschis mărginit de clasă C^1 şi $u \in W^{1,N}(\Omega)$. Atunci, în general, $u \notin L^\infty(\Omega)$. De exemplu, dacă

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N;\ |x| < 1/2\}$$

funcţia

$$u(x) = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^\alpha \quad \text{cu} \quad 0 < \alpha < 1 - \frac{1}{N}$$

aparţine lui $W^{1,N}(\Omega)$ (vezi [EX]), dar ea nu este mărginită din cauza singularităţii în $x = 0$. Cu toate acestea, are loc **inegalitatea lui Trudinger**:

$$\int_\Omega e^{|u|^{N/(N-1)}} < \infty \quad \forall u \in W^{1,N}(\Omega)$$

(vezi Adams [1] sau Gilbarg-Trudinger [1]).

IX.4 Spaţiul $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definiţie. – Fie $1 \le p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ desemnează închiderea lui $C_c^1(\Omega)$ în $W^{1,p}(\Omega)$. Notăm ([20])

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Spaţiul $W_0^{1,p}$ înzestrat cu norma indusă de $W^{1,p}$ este un spaţiu Banach separabil; el este reflexiv dacă $1 < p < \infty$. H_0^1 este un spaţiu Hilbert pentru produsul scalar din H^1.

$\star$ Remarca 18. – Deoarece $C_c^1(\mathbf{R}^N)$ este dens în $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$, avem

$$W_0^{1,p}(\mathbf{R}^N) = W^{1,p}(\mathbf{R}^N).$$

[20]Când nu există pericol de ambiguitate vom scrie $W_0^{1,p}, H_0^1$ în loc de $W_0^{1,p}(\Omega), H_0^1(\Omega)$.

In contrast, dacă $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ atunci, în general, $W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$. Totuşi dacă $\mathbf{R}^N \setminus \Omega$ este "suficient de subţire" şi $p < N$, atunci $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$. De exemplu, dacă $\Omega = \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ şi $N \geq 2$ se arată că $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ (vezi [EX]).

Remarca 19. – Se verifică cu uşurinţă – cu ajutorul unui şir regularizant (ρ_n) – că $C_c^\infty(\Omega)$ este dens în $W_0^{1,p}(\Omega)$. Cu alte cuvinte, putem utiliza $C_c^\infty(\Omega)$ în loc de $C_c^1(\Omega)$ în definiţia lui $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Funcţiile din $W_0^{1,p}(\Omega)$ sunt "în mare" funcţiile din $W^{1,p}(\Omega)$ care "se anulează pe $\Gamma = \partial\Omega$". Este delicat să se dea un sens precis acestei afirmaţii deoarece o funcţie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ este definită doar a.p.t. (dar Γ este neglijabilă!) şi u nu are reprezentant continuu ([21]). Totuşi caracterizările următoare sugerează că avem într-adevăr "de-a face" cu funcţii care sunt "nule pe Γ". Incepem cu

Lema IX.5. – Fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \leq p < \infty$ şi presupunem că $\operatorname{Supp} u$ **este un compact inclus în Ω. Atunci $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.**

Demonstraţie. – Fixăm un deschis ω astfel încât $\operatorname{Supp} u \subset \omega \subset\subset \Omega$ şi alegem $\alpha \in C_c^1(\omega)$ astfel încât $\alpha = 1$ pe $\operatorname{Supp} u$; deci $\alpha u = u$. Pe de altă parte (teorema IX.2) există un şir (u_n) în $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $u_n \to u$ în $L^p(\Omega)$ şi $\nabla u_n \to \nabla u$ în $(L^p(\omega))^N$. Rezultă că $\alpha u_n \to \alpha u$ în $W^{1,p}(\Omega)$. Deci $\alpha u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, adică $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema IX.17. – Presupunem că Ω este de clasă C^1. Fie ([22])

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \text{ cu } 1 \leq p < \infty.$$

Atunci următoarele proprietăţi sunt echivalente:

(i) $u = 0$ **pe** Γ.

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$**.**

Demonstraţie. – $(i) \Rightarrow (ii)$. Presupunem mai întâi că $\operatorname{Supp} u$ este

[21] Totuşi dacă $u \in W^{1,p}(\Omega)$ putem da un sens lui $u_{|\Gamma}$ (când Ω este neted) şi putem arăta că $u_{|\Gamma} \in L^p(\Gamma)$. Pentru aceasta trebuie să facem apel la **teoria de urmă** (vezi comentariile din acest capitol).

[22] Dacă $p > N$, atunci $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u \in C(\overline{\Omega})$ (vezi corolarul IX.14).

mărginit. Fixăm o funcţie $G \in C^1(\mathbf{R})$ astfel încât

$$|G(t)| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad \text{şi} \quad G(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } |t| \leq 1, \\ t & \text{dacă } |t| \geq 2. \end{cases}$$

Atunci $u_n = (1/n)G(nu)$ aparţine lui $W^{1,p}$ (propoziţia IX.5). Este uşor de verificat (cu ajutorul teoremei de convergenţă dominată) că $u_n \to u$ în $W^{1,p}$. Pe de altă parte,

$$\operatorname{Supp} u_n \subset \left\{ x \in \Omega;\ |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

şi deci $\operatorname{Supp} u_n$ este un compact conţinut în Ω. Conform lemei IX.5, $u_n \in W_0^{1,p}$ şi deci $u \in W_0^{1,p}$. In cazul general în care $\operatorname{Supp} u$ nu este mărginit, considerăm şirul $\zeta_n u$ de funcţii "troncate" ale lui u (ζ_n ca în demonstraţia teoremei IX.2). Din cazul de mai sus rezultă că $\zeta_n u \in W_0^{1,p}$ şi deci $\zeta_n u \to u$ în $W^{1,p}$, de unde obţinem $u \in W_0^{1,p}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Folosind hărţi locale reducem problema la situaţia următoare. Fie $u \in W_0^{1,p}(Q_+) \cap C(\overline{Q}_+)$; să se arate că $u = 0$ în Q_0.

Fie (u_n) un şir în $C_c^1(Q_+)$ astfel încât $u_n \to u$ în $W^{1,p}(Q_+)$.

Pentru orice $(x', x_N) \in Q_+$ avem

$$|u_n(x', x_N)| \leq \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt,$$

şi deci, pentru $0 < \varepsilon < 1$,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'|<1} \int_0^{\varepsilon} |u_n(x', x_N)|\, dx' dx_N \leq \int_{|x'|<1} \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dx' dt.$$

Prin trecere la limită când $n \to \infty$ ($\varepsilon > 0$ fixat) obţinem

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'|<1} \int_0^{\varepsilon} |u(x', x_N)|\, dx' dx_N \leq \int_{|x'|<1} \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dx' dt.$$

In sfârşit, dacă $\varepsilon \to 0$, găsim

$$\int_{|x'|<1} |u(x', 0)|\, dx' = 0$$

(deoarece $u \in C(\overline{Q}_+)$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \in L^1(Q_+)$). Deci $u = 0$ în Q_0.

Remarca 19. – In demonstraţia lui $(i) \Rightarrow (ii)$ nu am utilizat netezimea lui Ω. Din contră, reciproca $(ii) \Rightarrow (i)$ cere o ipoteză de regularitate asupra lui Ω (considerăm de exemplu $\Omega = \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ cu $N \geq 2$ şi $p \leq N$; vezi [EX]).

Iată o altă caracterizare a funcţiilor din $W_0^{1,p}$:

Propoziţia IX.18. – Presupunem că Ω este de clasă C^1. Fie $u \in L^p(\Omega)$ cu $1 < p < \infty$.

Proprietăţile următoare sunt echivalente:

(i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(ii) **Există o constantă C astfel încât**

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \left\| \varphi \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbf{R}^N), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N.$$

(iii) **Funcţia**

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \textbf{dacă } x \in \Omega \\ 0 & \textbf{dacă } x \in \mathbf{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

aparţine lui $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ şi, în acest caz, $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \overline{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}$.

Demonstraţie. – $(i) \Rightarrow (ii)$. Fie (u_n) un şir în $C_c^1(\Omega)$ astfel încât $u_n \to u$ în $W^{1,p}$. Pentru $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R}^N)$ avem

$$\left| \int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = \left| \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi \right| \leq \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

Prin trecere la limită obţinem (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Fie $\varphi \in C_c^1(\mathbf{R}^N)$; avem

$$\left| \int_\Omega \bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = \left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \left\| \varphi \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C \left\| \varphi \right\|_{L^{p'}(\mathbf{R}^N)}.$$

Deci $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ (conform propoziţiei IX.3).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Putem presupune că Ω este mărginit (dacă nu, considerăm şirul troncat $(\zeta_n u)$ al lui u). Prin hărţi locale şi partiţia unităţii reducem problema la următoarea situaţie. Fie $u \in L^p(Q_+)$; presupunem că funcţia

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dacă } x \in Q,\ x_N > 0 \\ 0 & \text{dacă } x \in Q,\ x_N < 0 \end{cases}$$

aparţine lui $W^{1,p}(Q)$; să se arate că

$$\alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+) \quad \forall \alpha \in C_c^1(Q).$$

Fie (ρ_n) un şir regularizant astfel încât

$$\operatorname{Supp} \rho_n \subset \left\{ x \in \mathbf{R}^N;\ \frac{1}{2n} < x_N < \frac{1}{n} \right\};$$

putem alege de exemplu

$$\rho_n(x) = n^N \rho(nx) \quad \text{şi} \quad \operatorname{Supp} \rho \subset \left\{ x \in \mathbf{R}^N;\ \frac{1}{2} < x_N < 1 \right\}.$$

Deci $\rho_n \star (\alpha\bar{u}) \to \alpha\bar{u}$ în $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ (observăm că funcţia $\alpha\bar{u}$ prelungită cu 0 în afara lui Q aparţine lui $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$). Pe de altă parte

$$\operatorname{Supp} (\rho_n \star \alpha\bar{u}) \subset \operatorname{Supp} \rho_n + \operatorname{Supp} (\alpha\bar{u}) \subset Q_+$$

pentru n suficient de mare. Rezultă că

$$\rho_n \star (\alpha\bar{u}) \in C_c^1(Q_+)$$

şi deci $\alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+)$.

Remarca 21. – Demonstraţia corolarului IX.14 face apel la un operator de prelungire şi acest fapt a necesitat ipoteza că Ω este neted. Dacă înlocuim $W^{1,p}(\Omega)$ cu $W_0^{1,p}(\Omega)$ dispunem de prelungirea canonică cu 0 în afara lui Ω, care este valabilă pentru un deschis **oarecare** Ω (notăm că, în demonstraţia propoziţiei IX.18, implicaţia $(i) \Rightarrow (iii)$ nu necesită altă ipoteză de netezime asupra lui Ω). Deci, în particular, corolarul IX.14 este adevărat pentru $W_0^{1,p}(\Omega)$ cu Ω deschis **arbitrar**. In mod similar, concluzia teoremei IX.16 este adevărată pentru $W_0^{1,p}(\Omega)$ cu Ω deschis

mărginit oarecare. Deducem de asemenea din teorema IX.9 că dacă Ω este un deschis **oarecare** şi $1 \le p < N$ atunci

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C(p,N)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{30}$$

• **Corolarul IX.19 (Inegalitatea lui Poincaré). – Presupunem că Ω este un deschis mărginit. Atunci există o constantă C (depinzând de Ω şi p) astfel încât**

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad (1 \le p < \infty).$$

In particular, expresia $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ este o normă pe $W_0^{1,p}(\Omega)$ care este echivalentă cu norma $\|u\|_{W^{1,p}}$; pe $H_0^1(\Omega)$ expresia $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ este un produs scalar care induce norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ echivalentă cu norma $\|u\|_{H^1}$.

Remarca 22. – Inegalitatea lui Poincaré rămâne valabilă dacă Ω are măsură finită sau dacă Ω este mărginit într-o singură direcţie (vezi [EX]).

Remarca 23. – Pentru m întreg ≥ 1 şi $1 \le p < \infty$ definim $W_0^{m,p}(\Omega)$ ca fiind închiderea lui $C_c^m(\Omega)$ în $W^{m,p}(\Omega)$. "In mare", o funcţie u aparţine lui $W_0^{m,p}(\Omega)$ dacă $u \in W^{m,p}(\Omega)$ şi $D^\alpha u = 0$ pe Γ pentru orice multi-indice α astfel încât $|\alpha| \le m-1$. Este important să **distingem** între $W_0^{m,p}(\Omega)$ şi $W^{m,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ pentru $m \ge 2$.

Dualul lui $W_0^{1,p}(\Omega)$

Notaţie. – Notăm cu $W^{-1,p'}(\Omega)$ dualul lui $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ şi prin $H^{-1}(\Omega)$ dualul lui $H_0^1(\Omega)$.

Identificăm $L^2(\Omega)$ şi dualul său, dar **nu identificăm $H_0^1(\Omega)$ cu dualul său**. Avem următoarea schemă

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

cu injecţii continue şi dense.

Dacă Ω este mărginit atunci

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{dacă} \quad \frac{2N}{N+2} \le p < \infty$$

cu injecţii continue şi dense.

Dacă Ω este nemărginit avem

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{dacă} \quad \frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2.$$

Putem caracteriza elementele din $W^{-1,p'}$ prin

Propoziţia IX.20. – Fie $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Atunci există f_0, f_1, $f_2, \ldots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$ astfel încât

$$\langle F, v\rangle = \int f_0 v + \sum_{i=1}^{N} \int f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

şi

$$\|F\| = \mathrm{Max}_{0\leq i\leq N} \|f_i\|_{L^{p'}}.$$

Dacă Ω este mărginit, putem lua $f_0 = 0$.

Demonstraţie. – Se adaptează demonstraţia propoziţiei VIII.13.

IX.5 Formularea variaţională a câtorva probleme la limită eliptice

Vom aborda în cele ce urmează rezolvarea câtorva ecuaţii cu derivate parţiale ([23]) eliptice de ordinul al doilea.

Exemplul 1. (Problema Dirichlet omogenă). Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă şi mărginită. Căutăm o funcţie $u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ care verifică

$$\tag{31} \boxed{\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}}$$

unde

$$\boxed{\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{Laplacianul lui } u,}$$

şi f este o funcţie dată pe Ω. **Condiţia pe frontieră** $u = 0$ pe Γ se numeşte **condiţie Dirichlet** (omogenă).

[23] Pe scurt EDP (=PDE în engleză).

Definiţii. – O soluţie **clasică** a lui (31) este o funcţie $u \in C^2(\overline{\Omega})$ care verifică (31). O soluţie **slabă** a lui (31) este o funcţie $u \in H_0^1(\Omega)$ care verifică

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{32}$$

unde $\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

Să punem în aplicare programul descris în capitolul VIII.

Etapa A. Orice soluţie clasică este o soluţie slabă. – Intradevăr, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ şi $u = 0$ pe Γ, deci $u \in H_0^1(\Omega)$ conform teoremei IX.17 (vezi şi remarca 20). Pe de altă parte, dacă $v \in C_c^1(\Omega)$ avem

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

şi, prin densitate, această egalitate rămâne valabilă pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$.

Etapa B. Existenţa şi unicitatea soluţiei slabe.

• **Teorema IX.21 (Dirichlet, Riemann, Hilbert). – Pentru orice $f \in L^2(\Omega)$ există şi este unică o soluţie slabă $u \in H_0^1(\Omega)$ a problemei (31). In plus, u se obţine prin**

$$\boxed{\mathrm{Min}_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|^2 + |v|^2) - \int_\Omega fv \right\}.}$$

Acesta este **principiul lui Dirichlet**.

Demonstraţie. – Aplicăm teorema lui Lax-Milgram în spaţiul Hilbert $H = H_0^1(\Omega)$ cu forma biliniară

$$a(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)$$

şi funcţionala liniară $\varphi : v \mapsto \int_\Omega fv$.

Etapa C. Regularitatea soluţiei slabe. – Această problemă este delicată; o vom aborda în §IX.6.

Etapa D. Reîntoarcerea la soluţia clasică. – Să admitem că soluţia slabă $u \in H_0^1(\Omega)$ a lui (31) aparţine spaţiului $C^2(\overline{\Omega})$ şi că Ω este de clasă C^1. Atunci $u = 0$ pe Γ (din teorema IX.17). Pe de altă parte avem

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)v = \int_\Omega fv \quad \forall v \in C_c^1(\Omega)$$

şi deci $-\Delta u + u = f$ a.p.t. în Ω deoarece $C_c^1(\Omega)$ este dens în $L^2(\Omega)$. De fapt, avem $-\Delta u + u = f$ peste tot în Ω deoarece $u \in C^2(\Omega)$; deci u este o soluţie clasică.

Vom descrie în continuare alte câteva exemple. Insistăm asupra faptului că este **absolut fundamental să precizăm foarte clar spaţiul funcţional pe care se caută soluţia slabă**.

Exemplul 2. (Problema lui Dirichlet neomogenă). Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un deschis mărginit. Căutăm o funcţie $u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ care verifică

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{în } \Omega \\ u = g & \text{pe } \Gamma \end{cases} \tag{33}$$

unde f este dată pe Ω şi g este o funcţie dată definită pe Γ.

Presupunem că există o funcţie $\tilde{g} \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ astfel încât $\tilde{g} = g$ pe Γ ([24]) şi introducem mulţimea

$$K = \{v \in H^1(\Omega);\ \ v - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Din teorema IX.17 rezultă că mulţimea K nu depinde de alegerea lui $\tilde{g}$ şi depinde doar de g; K este un convex închis nevid în $H^1(\Omega)$.

Definiţii. O soluţie **clasică** a lui (33) este o funcţie $u \in C^2(\overline{\Omega})$ care verifică (33). O soluţie **slabă** a lui (33) este o funcţie $u \in K$ care verifică

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{34}$$

Este evident că orice soluţie clasică este soluţie slabă.

• **Propoziţia IX.22. – Pentru orice $f \in L^2(\Omega)$ există şi este unic $u \in K$, soluţie slabă a lui (33). In plus, u se obţine prin**

$$\mathrm{Min}_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_\Omega fv \right\}.$$

[24]Această ipoteză este verificată, **de exemplu**, dacă Ω este de clasă C^1 şi $g \in C^1(\Gamma)$. Dacă Ω este suficient de neted nu este necesar să presupunem că $\tilde{g} \in C(\overline{\Omega})$. Aplicând teoria de urmă (vezi comentariile de la sfârşitul acestui capitol), este suficient să ştim că $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$, adică $g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

DEMONSTRAŢIE. – Observăm mai întâi că $u \in K$ este soluţie slabă a lui (33) dacă şi numai dacă avem

$$\int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) + \int_\Omega u(v-u) \geq \int_\Omega f(v-u) \quad \forall v \in K. \tag{35}$$

Intr-adevăr, dacă u este o soluţie slabă a lui (33) este evident că

$$\int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) + \int_\Omega u(v-u) = \int_\Omega f(v-u) \quad \forall v \in K.$$

Reciproc, dacă $u \in K$ verifică (35), alegem $v = u \pm w$ în (35) cu $w \in H_0^1(\Omega)$ şi obţinem (34). Putem aplica acum teorema lui Stampacchia (teorema V.6) în $H = H^1(\Omega)$. Studiul regularităţii şi reîntoarcerea la soluţia clasică se efectuează ca în exemplul 1.

Exemplul 3. (Ecuaţii eliptice de ordinul al doilea). Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă şi mărginită. Fie funcţiile $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq N$ care satisfac **condiţia de elipticitate**

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N \text{ cu } \alpha > 0. \tag{36}$$

Considerăm de asemenea o funcţie $a_0 \in C(\overline{\Omega})$. Căutăm o funcţie $u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ care verifică

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0 u = f & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma. \end{cases} \tag{37}$$

O soluţie **clasică** a lui (37) este o funcţie $u \in C^2(\overline{\Omega})$ care verifică (37). O soluţie **slabă** a lui (37) este o funcţie $u \in H_0^1(\Omega)$ care satisface

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{38}$$

Este evident că orice soluţie clasică este soluţie slabă. Pe de altă parte, dacă $a_0(x) \geq 0$ în Ω atunci pentru orice $f \in L^2(\Omega)$ există o unică soluţie slabă $u \in H_0^1$; într-adevăr, se aplică teorema lui Lax-Milgram în spaţiul $H = H_0^1$ cu forma biliniară şi continuă

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 uv.$$

Coercivitatea lui $a(\ ,\ )$ rezultă din ipoteza de elipticitate şi din inegalitatea lui Poincaré. Dacă, în plus, matricea (a_{ij}) este simetrică, atunci forma $a(\ ,\ )$ este simetrică şi u se obţine prin

$$\mathrm{Min}_{v \in H_0^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 v^2 \right) - \int_\Omega f v \right\}.$$

Considerăm acum următoarea problemă mai generală: să se găsească o funcţie $u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ care verifică

$$\text{(39)} \qquad \begin{cases} -\sum_{i,j} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_i a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma \end{cases}$$

unde $a_i(x)$ sunt funcţii date în $C(\overline{\Omega})$. O soluţie **slabă** a lui (39) este o funcţie $u \in H_0^1$ astfel încât

$$\text{(40)} \qquad \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1.$$

Introducem pe $H_0^1(\Omega)$ forma biliniară şi continuă asociată

$$\text{(41)} \qquad a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \int_\Omega a_0 uv.$$

In general această formă nu este simetrică ([25]); în **anumite cazuri** ea este coercivă: atunci se demonstrează existenţa şi unicitatea soluţiei slabe via teorema lui Lax-Milgram. In **toate cazurile** avem

Teorema IX.23. – Dacă $f = 0$, atunci mulţimea soluţiilor $u \in H_0^1(\Omega)$ ale lui (40) este un spaţiu vectorial de dimensiune finită,

[25] In dimensiune N nu se cunoaşte un artificiu care să permită, ca în dimensiune 1, să reducem problema la cazul simetric.

să zicem d. In plus, există un subspaţiu vectorial $F \subset L^2(\Omega)$ de dimensiune d astfel încât ([26])

$$[\textbf{(40) are o soluţie}] \Leftrightarrow \left[\int_\Omega fv = 0 \quad \forall v \in F\right].$$

REMARCA IX.24. – Presupunem că ecuaţia omogenă asociată lui (40), adică pentru $f = 0$, admite $u = 0$ ca soluţie **unică**. Atunci, pentru orice $f \in L^2$, **există** $u \in H_0^1$ soluţie unică a lui (40) ([27]). In particular, dacă $a_0 \geq 0$ în Ω se demonstrează – printr-o metodă de tip "principiu de maxim" – că $(f = 0) \Rightarrow (u = 0)$. Deducem aşadar, sub singura ipoteză $a_0 \geq 0$ în Ω că pentru orice $f \in L^2$ există $u \in H_0^1$ soluţie unică a lui (40); vezi Gilbarg-Trudinger [1] şi [EX].

DEMONSTRAŢIE. – **Fixăm** $\lambda > 0$ suficient de mare astfel încât forma biliniară

$$a(u, v) + \lambda \int_\Omega uv$$

să fie coercivă pe H_0^1. Pentru orice $f \in L^2$ există şi este unic $u \in H_0^1$ astfel încât

$$a(u, \varphi) + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1.$$

Fie $u = Tf$; deci $T : L^2 \to L^2$ este un operator liniar **compact** (deoarece Ω este mărginit, injecţia $H_0^1 \subset L^2$ este compactă; vezi teorema IX.16 şi remarca 21). Ecuaţia (40) este echivalentă cu

$$u = T(f + \lambda u). \tag{42}$$

Introducem $v = f + \lambda u$ ca nouă necunoscută şi (42) devine

$$v - \lambda Tv = f. \tag{43}$$

Concluzia rezultă prin aplicarea Alternativei lui Fredholm.

[26] Altfel spus, [(40) are o soluţie] $\Leftrightarrow$ f satisface d **condiţii de ortogonalitate**.

[27] Observăm legătura strânsă dintre **existenţa** şi **unicitatea** soluţiilor unei ecuaţii eliptice. Această legătură remarcabilă este o consecinţă a Alternativei lui Fredholm (teorema VI.6).

Exemplul 4. (Problema Neumann omogenă). – Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă, mărginită, de clasă C^1. Căutăm o funcţie $u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ care verifică

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{în } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{pe } \Gamma \end{cases} \tag{44}$$

unde f este o funcţie dată pe Ω; $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ reprezintă derivata normală exterioară a lui u, adică $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n}$ unde $\vec{n}$ este versorul normalei exterioare la Γ. Condiţia pe frontieră $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ pe Γ se numeşte **condiţie Neumann** (omogenă).

Definiţii. – O soluţie **clasică** a lui (44) este o funcţie $u \in C^2(\overline{\Omega})$ care satisface (44). O soluţie **slabă** a lui (44) este o funcţie $u \in H^1(\Omega)$ care verifică

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{45}$$

Etapa A. Orice soluţie clasică este soluţie slabă. – Reamintim mai întâi că, în virtutea **formulei lui Green** avem

$$\int_\Omega (\Delta u)v = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}) \tag{46}$$

unde $d\sigma$ este măsura de suprafaţă pe Γ. Dacă u este o soluţie clasică a lui (44), atunci $u \in H^1(\Omega)$ şi avem

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Deducem prin densitate (corolarul IX.8) că

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Etapa B. Existenţa şi unicitatea soluţiei slabe.

• **Propoziţia IX.24. – Pentru orice $f \in L^2(\Omega)$, există o unică soluţie slabă $u \in H^1(\Omega)$ a lui (44). In plus, u se obţine prin**

$$\mathrm{Min}_{v \in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2 \right) - \int_\Omega fv \right\}.$$

DEMONSTRAŢIE. – Se aplică teorema lui Lax-Milgram în $H = H^1(\Omega)$.

Etapa C. Regularitatea soluţiei slabe; vezi §IX.6.

Etapa D. Revenirea la soluţia clasică. – Dacă $u \in C^2(\Omega)$ este o soluţie slabă a lui (44), avem, conform (46),

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)v + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma = \int_\Omega fv \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{47}$$

In (47) alegem mai întâi $v \in C^1_c(\Omega)$ şi obţinem

$$-\Delta u + u = f \text{ în } \Omega.$$

Revenim apoi la (47) cu $v \in C^1(\overline{\Omega})$; obţinem

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma = 0 \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

şi deci $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ pe Γ.

Exemplul 5. (Domenii nemărginite). – In cazul în care Ω este un deschis **nemărginit** în $\mathbf{R}^N$ se impune – în plus faţă de condiţiile la limită uzuale pe $\Gamma = \partial\Omega$ – o **condiţie la limită la infinit**, de exemplu $u(x) \to 0$ dacă $|x| \to \infty$. Aceasta se "traduce" la nivelul soluţiei slabe ([28]) prin condiţia $u \in H^1$. Existenţa şi unicitatea soluţiei slabe sunt uşor de demonstrat:

Exemple: a) $\Omega = \mathbf{R}^N$; pentru orice $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$ ecuaţia

$$-\Delta u + u = f \quad \text{în } \mathbf{R}^N$$

admite o unică soluţie slabă în sensul următor:

$$u \in H^1(\mathbf{R}^N) \quad \text{şi} \quad \int_{\mathbf{R}^N} \nabla u \nabla v + \int_{\mathbf{R}^N} uv = \int_{\mathbf{R}^N} fv \quad \forall v \in H^1(\mathbf{R}^N).$$

b) $\Omega = \mathbf{R}^N_+$; pentru orice $f \in L^2(\mathbf{R}^N_+)$ problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{în } \mathbf{R}^N_+ \\ u(x', 0) = 0 & \text{pentru } x' \in \mathbf{R}^{N-1} \end{cases}$$

[28] Bineînţeles, trebuie mai întâi **demonstrat** că dacă u este o soluţie clasică astfel încât $u(x) \to 0$ dacă $|x| \to \infty$, atunci **în mod necesar** $u \in H^1$; vezi un exemplu în [EX].

admite o unică soluţie slabă în sensul următor:

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{şi} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

c) $\Omega = \mathbf{R}_+^N$; pentru orice $f \in L^2(\mathbf{R}_+^N)$ problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{în } \mathbf{R}_+^N \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_N}(x', 0) = 0 & \text{pentru } x' \in \mathbf{R}^{n-1} \end{cases}$$

admite o unică soluţie slabă în sensul următor:

$$u \in H^1(\Omega) \quad \text{şi} \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

IX.6 Regularitatea soluţiilor slabe

Definiţie. – Spunem că un deschis Ω este de **clasă** C^m, $m \geq 1$ un întreg, dacă pentru orice $x \in \Gamma$ există o vecinătate U a lui x în $\mathbf{R}^N$ şi o aplicaţie bijectivă $H : Q \to U$ astfel încât

$$H \in C^m(\overline{Q}), \ H^{-1} \in C^m(\overline{U}), \ H(Q_+) = U \cap \Omega, \ H(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

Spunem că Ω este de **clasă** C^∞ dacă Ω este de clasă C^m pentru orice m.

Principalele rezultate de regularitate sunt următoarele:

• **Teorema IX.25 (Regularitatea pentru problema Dirichlet). – Fie Ω un deschis de clasă C^2 cu Γ mărginită [sau $\Omega = \mathbf{R}_+^N$]. Fie $f \in L^2(\Omega)$ şi $u \in H_0^1(\Omega)$ care verifică**

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{48}$$

Atunci $u \in H^2(\Omega)$ şi $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$ unde C este o constantă care depinde doar de Ω. In plus, dacă Ω este de clasă C^{m+2} şi $f \in H^m(\Omega)$, atunci

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad \textbf{cu} \quad \|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m}.$$

In particular, dacă $f \in H^m(\Omega)$ cu $m > N/2$, atunci $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

In sfârşit, dacă Ω este de clasă C^∞ şi dacă $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, atunci $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Teorema IX.26 (Regularitatea pentru problema Neumann). – Cu aceleaşi ipoteze ca în teorema IX.25 se obţin aceleaşi concluzii pentru soluţia problemei Neumann, adică pentru $u \in H^1(\Omega)$ **astfel încât**

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{49}$$

Remarca 25. – Se obţin aceleaşi concluzii pentru soluţia problemei Dirichlet (sau Neumann) asociată unui operator eliptic de ordinul al doilea general adică, dacă $u \in H_0^1(\Omega)$ verifică

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_J} = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

atunci

$$f \in L^2(\Omega) \ \text{ şi } \ \ a_{ij} \in C(\overline{\Omega}) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$$

şi, pentru $m \geq 1$, ([29])

$$f \in H^m(\Omega) \ \text{ şi } \ \ a_{ij} \in C^{m+1}(\overline{\Omega}) \Rightarrow u \in H^{m+2}(\Omega).$$

Vom demonstra doar teorema IX.25; demonstraţia teoremei IX.26 este cu totul analoagă (vezi [EX]). Ideea principală a demonstraţiei este următoarea. Se stabileşte mai întâi teorema IX.25 pentru $\Omega = \mathbf{R}^N$ şi apoi pentru $\Omega = \mathbf{R}_+^N$. In cazul general al unui deschis oarecare Ω se procedează în două etape:

1) Regularitate în interior, adică în orice deschis $\omega \subset\subset \Omega$ (ne inspirăm din cazul $\Omega = \mathbf{R}^N$).

2) Regularitate în vecinătatea frontierei (ne inspirăm – după trecerea la hărţi locale – din cazul $\Omega = \mathbf{R}_+^N$).

[29] Dacă Ω este nemărginit, trebuie să presupunem în plus că

$$D^\alpha a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \ \ \forall \alpha, |\alpha| \leq 1 \text{ (resp. } |\alpha| \leq m+1).$$

Recomandăm cititorului să înţeleagă bine cazurile $\Omega = \mathbf{R}^N$ şi $\Omega = \mathbf{R}^N_+$ înainte de a aborda cazul general.

Planul acestui paragraf este următorul:

A. Cazul $\Omega = \mathbf{R}^N$.

B. Cazul $\Omega = \mathbf{R}^N_+$.

C. Cazul general:

C_1. Estimări în interior.

C_2. Estimări în vecinătatea frontierei.

Ingredientul esenţial în demonstraţie este **metoda translaţiilor** ([30]) datorată lui L. Nirenberg.

A. **Cazul** $\Omega = \mathbf{R}^N$.

Notaţie. – Fiind dat $h \in \mathbf{R}^N$, $h \neq 0$, punem

$$D_h u = \frac{1}{|h|}(\tau_h u - u), \text{ adică } D_h u(x) = \frac{u(x-h) - u(x)}{|h|}.$$

In (48) luăm $\varphi = D_{-h}(D_h u)$, ceea ce este posibil deoarece $\varphi \in H^1(\mathbf{R}^N)$ (căci $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$); obţinem

$$\int |\nabla D_h u|^2 + \int |D_h u|^2 = \int f\, D_{-h}(D_h u)$$

şi deci

$$\|D_h u\|^2_{H^1} \leq \|f\|_{L^2} \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2}. \tag{50}$$

Pe de altă parte avem

$$\|D_{-h} v\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \quad \forall v \in H^1. \tag{51}$$

Intr-adevăr, reamintim (propoziţia IX.3) că

$$\|D_{-h} v\|_{L^2(\omega)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \qquad \forall \omega \subset\subset \mathbf{R}^N, \;\; \forall h;$$

de unde rezultă (51). Combinând (50) şi (51) obţinem

$$\|D_h u\|^2_{H^1} \leq \|f\|_{L^2} \|D_h u\|_{L^2}$$

[30] Numită şi **tehnica câturilor diferenţiale**.

şi deci

(52).
$$\|D_h u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2}$$

In particular

$$\left\| D_h \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N$$

şi deci $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1$ (conform propoziţiei IX.3); de aici obţinem $u \in H^2$.

Arătăm acum că $f \in H^1 \Rightarrow u \in H^3$. Notăm cu Du una dintre derivatele $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq N$. Ştim deja că $Du \in H^1$. Trebuie să arătăm că $Du \in H^2$. Pentru aceasta e suficient să verificăm că

(53)
$$\int \nabla(Du) \cdot \nabla\varphi + \int (Du)\varphi = \int (Df)\varphi \quad \forall \varphi \in H^1$$

(se aplică apoi etapa precedentă care implică $Du \in H^2$, deci $u \in H^3$). Fie aşadar $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$. In (48) putem înlocui φ cu $D\varphi$. Obţinem

$$\int \nabla u \cdot \nabla(D\varphi) + \int u D\varphi = \int f D\varphi$$

şi deci

$$\int \nabla(Du) \cdot \nabla\varphi + \int (Du)\varphi = \int (Df)\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N).$$

Aceasta implică (53) deoarece $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ este dens în $H^1(\mathbf{R}^N)$ (corolarul IX.8).

Pentru a arăta că $f \in H^m \Rightarrow u \in H^{m+2}$ este suficient să raţionăm prin inducţie în raport cu m şi să aplicăm (53).

B. **Cazul** $\Omega = \mathbf{R}_+^N$

Utilizăm din nou **translaţii**, dar doar în **direcţiile tangenţiale**, adică alegem $h \in \mathbf{R}^{N-1} \times \{0\}$: spunem că h este **paralel cu frontiera** şi notăm aceasta cu $h \parallel \Gamma$. Este esenţial de observat că

$$u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \tau_h u \in H_0^1(\Omega) \text{ dacă } h \parallel \Gamma.$$

Cu alte cuvinte, $H_0^1(\Omega)$ **este invariant la translaţii tangenţiale**. Alegem $h \parallel \Gamma$ şi luăm $\varphi = D_{-h}(D_h u)$ în (48); obţinem

$$\int |\nabla(D_h u)|^2 + \int |D_h u|^2 = \int f \; D_{-h}(D_h u),$$

adică

$$\|D_h u\|_{H^1}^2 \le \|f\|_{L^2}\|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2}\,. \tag{54}$$

Folosim acum

Lema IX.6. – Avem

$$\|D_h v\|_{L^2(\Omega)} \le \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \forall h \parallel \Gamma.$$

Demonstraţie. – Presupunem mai întâi că $v \in C_c^1(\mathbf{R}^N)$ şi urmăm demonstraţia propoziţiei IX.3 (observăm că dacă $h \parallel \Gamma$ atunci $\Omega + th = \Omega$ pentru orice $0 < t < 1$). Pentru $v \in H^1(\Omega)$ se raţionează prin densitate.

Combinând (54) şi lema IX.6 obţinem

$$\|D_h u\|_{H^1} \le \|f\|_{L^2} \qquad \forall h \parallel \Gamma. \tag{55}$$

Fie $1 \le j \le N$, $1 \le k \le N-1$, $h = |h|e_k$ şi $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Avem

$$\int D_h\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\varphi = -\int u D_{-h}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)$$

şi, conform (55),

$$\left|\int u D_{-h}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\right| \le \|f\|_{L^2}\,\|\varphi\|_{L^2}.$$

Trecând la limită cu $h \to 0$ obţinem

$$\left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}\right| \le \|f\|_{L^2}\,\|\varphi\|_{L^2} \quad \forall 1 \le j \le N, 1 \le k \le N-1. \tag{56}$$

Arătăm în sfârşit că

$$\left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_N^2}\right| \le \|f\|_{L^2}\,\|\varphi\|_{L^2} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{57}$$

Pentru aceasta **revenim la ecuaţia (48)**; aceasta implică inegalitatea

$$\left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_N^2}\right| \le \sum_{i=1}^{N-1}\left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\right| + \left|\int (f-u)\varphi\right| \le C\|f\|_{L^2}\,\|\varphi\|_{L^2},$$

conform (56). Combinând (56) şi (57) găsim

$$\left|\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}\right| \le C\|f\|_{L^2}\,\|\varphi\|_{L^2} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall 1 \le j,k \le N.$$

In consecinţă, $u \in H^2(\Omega)$ (de notat că există $f_{jk} \in L^2(\Omega)$ astfel încât

$$\int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \int f_{jk}\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

conform teoremei lui Hahn-Banach şi teoremei de reprezentare Riesz-Fréchet).

In sfârşit, arătăm că $f \in H^m(\Omega) \Rightarrow u \in H^{m+2}(\Omega)$. Notăm cu Du una dintre **derivatele tangenţiale** $Du = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, 1 \le j \le N-1$. Stabilim lema următoare şi raţionăm apoi prin inducţie în raport cu m ([31]).

Lema IX.7. – Fie $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ **verificând (48). Atunci** $Du \in H_0^1(\Omega)$ **şi**

$$\text{(58)} \qquad \int \nabla(Du)\cdot\nabla\varphi + \int (Du)\varphi = \int (Df)\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstraţie. – Singurul punct delicat constă în a demonstra că $Du \in H_0^1(\Omega)$ [într-adevăr alegem $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ şi înlocuim φ cu $D\varphi$ în (48); de aici deducem (58) prin densitate]. Fie $h = |h|e_j$, $1 \le j \le N-1$; atunci $D_h u \in H_0^1$ (deoarece H_0^1 este invariant la translaţii tangenţiale). Conform lemei IX.6 avem

$$\|D_h u\|_{H^1} \le \|u\|_{H^2}.$$

Deci există un şir $h_n \to 0$ astfel încât $D_{h_n}u$ converge slab la g în H_0^1 (deoarece H_0^1 este spaţiu Hilbert). In particular, $D_{h_n}u \rightharpoonup g$ slab în L^2. Pentru $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ avem

$$\int (D_h u)\varphi = -\int u D_{-h}\varphi$$

şi, prin trecere la limită când $h_n \to 0$, obţinem

$$\int g\varphi = -\int u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

[31] Pentru a estima **derivatele normale**, trebuie să revenim încă o dată la ecuaţia (48).

Deci $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = g \in H_0^1(\Omega)$.

C. **Cazul general**.

Demonstrăm că $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$ ([32]). Pentru a simplifica, presupunem că Ω este mărginit; folosim o partiţie a unităţii şi scriem $u = \sum_{i=0}^{k} \theta_i u$ ca în demonstraţia teoremei IX.7.

C_1. **Estimări în interior**.

Este vorba de a demonstra că $\theta_0 u \in H^2(\Omega)$. Deoarece $\theta_{0|\Omega} \in C_c^\infty(\Omega)$, funcţia $\theta_0 u$ prelungită cu 0 în afara lui Ω aparţine lui $H^1(\mathbf{R}^N)$ (vezi remarca 4*b*)). Se verifică cu uşurinţă că $\theta_0 u$ este o soluţie slabă pe $\mathbf{R}^N$ a ecuaţiei

$$-\Delta(\theta_0 u) + \theta_0 u = \theta_0 f - 2\nabla\theta_0 \cdot \nabla u - (\Delta\theta_0)u = g$$

cu $g \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Din cazul A deducem că $\theta_0 u \in H^2(\mathbf{R}^N)$ cu

$$\|\theta_0 u\|_{H^2} \leq C(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}) \leq C\|f\|_{L^2}$$

deoarece $\|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2}$ (conform (48)).

C_2. **Estimări în vecinătatea frontierei**

Este vorba de a demonstra că $\theta_i u \in H^2(\Omega)$ pentru $1 \leq i \leq k$. Reamintim că $\theta_i \in C_c^\infty(U_i)$ şi că există o bijecţie $H : Q \to U$ astfel încât

$$H \in C^2(\bar{Q}), \quad J = H^{-1} \in C^2(U_i), \quad H(Q_+) = \Omega \cap U_i, \quad H(Q_0) = \Gamma \cap U_i.$$

Scriem $x = H(y)$ şi $y = H^{-1}(x) = J(x)$.

Se verifică cu uşurinţă că $v = \theta_i u \in H_0^1(\Omega \cap U_i)$ şi că v este soluţie slabă pe $\Omega \cap U_i$ a ecuaţiei

$$-\Delta v = \theta_i f - \theta_i u - 2\nabla\theta_i \cdot \nabla u - (\Delta\theta_i)u = g$$

cu $g \in L^2(\Omega \cap U_i)$ şi $\|g\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}$. Mai precis avem

$$(59) \qquad \int_{\Omega\cap U_i} \nabla v \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_{\Omega\cap U_i} g\varphi \, dx \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega \cap U_i).$$

---

[32]Pentru a demonstra că $f \in H^m(\Omega) \Rightarrow u \in H^{m+2}(\Omega)$ se raţionează prin inducţie în raport cu m ca în cazurile A şi B.

Transportăm $v_{|\Omega\cap U_i}$ pe Q_+. Fie

$$w(y) = v(H(y)) \quad \text{pentru } y \in Q_+,$$

adică

$$w(Jx) = v(x) \quad \text{pentru } x \in \Omega \cap U_i.$$

Lema următoare – care este fundamentală – arată că ecuaţia (59) se transportă pe Q_+ într-o ecuaţie eliptică de ordinul al doilea ([33]).

Lema IX.8. – Cu notaţiile de mai sus, avem $w \in H_0^1(Q_+)$ şi

$$\sum_{k,\ell=1}^{N} \int_{Q_+} a_{k\ell} \frac{\partial w}{\partial y_k} \frac{\partial \psi}{\partial y_\ell}\, dy = \int_{Q_+} \tilde{g}\psi dy \quad \forall \psi \in H_0^1(Q_+), \tag{60}$$

unde $\tilde{g} = (g \circ H)|\mathrm{Jac}\, H| \in L^2(Q_+)$ şi funcţiile $a_{k\ell} \in C^1(\bar{Q}_+)$ satisfac condiţia de elipticitate (36).

Demonstraţie. – Fie $\psi \in H_0^1(Q_+)$ şi punem $\varphi(x) = \psi(Jx)$ pentru $x \in \Omega \cap U_i$. Atunci $\varphi \in H_0^1(\Omega \cap U_i)$ şi

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial w}{\partial y_k} \frac{\partial J_k}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sum_\ell \frac{\partial \psi}{\partial y_\ell} \frac{\partial J_\ell}{\partial x_j}.$$

Deci

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap U_i} \nabla v \quad \nabla \varphi\, dx &= \textstyle\int_{\Omega\cap U_i} \sum_{j,k,\ell} \frac{\partial J_k}{\partial x_j} \frac{\partial J_\ell}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial y_k} \frac{\partial \psi}{\partial y_\ell}\, dx \\ &= \int_{Q_+} \sum_{j,k,\ell} \frac{\partial J_k}{\partial x_j} \frac{\partial J_\ell}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial y_k} \frac{\partial \psi}{\partial y_\ell} |\mathrm{Jac}\, H|\, dy\end{aligned}$$

conform formulelor uzuale de schimbare de variabilă pentru integrale. In consecinţă,

$$\int_{\Omega\cap U_i} \nabla v \cdot \nabla \varphi\, dx = \int_{Q_+} \sum_{k,\ell} a_{k\ell} \frac{\partial w}{\partial y_k} \frac{\partial \psi}{\partial y_\ell}\, dy \tag{61}$$

cu

$$a_{k\ell} = \sum_j \frac{\partial J_k}{\partial x_j} \frac{\partial J_\ell}{\partial x_j} |\mathrm{Jac}\, H|.$$

[33] Mai generală este **condiţia de elipticitate care rămâne stabilă printr-o schimbare de variabilă**.

Observăm că $a_{k\ell} \in C^1(\overline{Q}_+)$ şi condiţia de elipticitate este satisfăcută deoarece pentru orice $\xi \in \mathbf{R}^N$, avem

$$\sum_{k,\ell} a_{k\ell}\xi_k\xi_\ell = |\mathrm{Jac}\, H| \sum_j \left| \sum_k \frac{\partial J_k}{\partial x_j} \xi_k \right|^2 \geq \alpha |\xi|^2$$

cu $\alpha > 0$ deoarece matricile jacobiene $\mathrm{Jac}\, H$ şi $\mathrm{Jac}\, J$ nu sunt singulare.

Pe de altă parte avem

$$\int_{\Omega \cap U_i} g\varphi \, dx = \int_{Q_+} (g \circ H)\psi |\mathrm{Jac}\, H| \, dy. \tag{62}$$

Combinând (59), (61) şi (62) obţinem (60), ceea ce încheie demonstraţia lemei IX.8.

Arătăm acum că $w \in H^2(Q_+)$ şi că $\|w\|_{H^2} \leq C\|\tilde{g}\|_{L^2}$ ([34]); aceasta va implica, prin revenirea la $\Omega \cap U_i$ că $\theta_i u$ aparţine lui $H^2(\Omega \cap U_i)$ şi deci, în fapt, lui $H^2(\Omega)$ cu $\|\theta_i u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$.

Ca în cazul B ($\Omega = \mathbf{R}^N_+$) folosim **translaţii tangenţiale**. In (60) alegem $\psi = D_{-h}(D_h w)$ cu $h \parallel Q_0$ şi $|h|$ suficient de mic pentru ca $\psi \in H^1_0(Q_+)$ ([35]). Astfel obţinem

$$\sum_{k,\ell} \int_{Q_+} D_h \left(a_{k\ell} \frac{\partial w}{\partial y_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_\ell}(D_h w) = \int_{Q_+} \tilde{g} D_{-h}(D_h w). \tag{63}$$

Dar

$$\int_{Q_+} \tilde{g} D_{-h}(D_h w) \leq \|\tilde{g}\|_{L^2} \|D_{-h}(D_h w)\|_{L^2} \leq \|\tilde{g}\|_{L^2} \|\nabla D_h w\|_{L^2} \tag{64}$$

(lema IX.6).

Pe de altă parte, scriem

$$D_h \left(a_{k\ell} \frac{\partial w}{\partial y_k} \right)(y) = a_{k\ell}(y+h) \frac{\partial}{\partial y_k} D_h w(y) + (D_h a_{k\ell}(y)) \frac{\partial w}{\partial y_k}(y),$$

şi, ca o consecinţă,

$$\sum_{k,\ell} \int_{Q_+} D_h \left(a_{k\ell} \frac{\partial w}{\partial y_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_\ell}(D_h w) \geq \alpha \|\nabla(D_h w)\|^2_{L^2} - C\|w\|_{H^1} \|\nabla D_h w\|_{L^2}. \tag{65}$$

[34]In continuare notăm cu C diverse constante care depind doar de a_{kl}.

[35]Reamintim că $\mathrm{Supp}\, w \subset \{(x', x_N); |x'| < 1 - \delta$ şi $0 \leq x_N < 1 - \delta\}$ cu $\delta > 0$.

Combinând (64) şi (65) obţinem

$$\|\nabla D_h w\|_{L^2} \le C(\|w\|_{H^1} + \|\tilde{g}\|_{L^2}) \le C\|\tilde{g}\|_{L^2} \tag{66}$$

(observăm că din (60) şi din inegalitatea lui Poincaré avem $\|w\|_{H^1} \le C\|\tilde{g}\|_{L^2}$).

Deducem din (66) – ca în cazul B – că

$$\left|\int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial \psi}{\partial y_\ell}\right| \le C\|\tilde{g}\|_{L^2}\ \|\psi\|_{L^2} \quad \forall \psi \in C_c^1(Q_+), \quad \forall (k,\ell) \ne (N,N). \tag{67}$$

Pentru a conchide că $w \in H^2(Q_+)$ (şi $\|w\|_{H^2} \le C\|\tilde{g}\|_{L^2}$) rămâne să arătăm că

$$\left|\int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial \psi}{\partial y_N}\right| \le C\|\tilde{g}\|_{L^2}\ \|\psi\|_{L^2} \quad \forall \psi \in C_c^1(Q_+). \tag{68}$$

Pentru aceasta **revenim la ecuaţia (60)** unde înlocuim ψ cu $(1/a_{NN})\psi$ ($\psi \in C_c^1(Q_+)$); acest lucru este posibil deoarece $a_{NN} \in C^1(\bar{Q}_+)$ şi $a_{NN} \ge \alpha > 0$. Rezultă că

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_+} a_{NN}\frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial}{\partial y_N}\left(\frac{\psi}{a_{NN}}\right) = \\
&= \int_{Q_+} \frac{\tilde{g}}{a_{NN}}\psi - \sum_{(k,\ell)\ne(N,N)} \int_{Q_+} a_{k\ell}\frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_\ell}\left(\frac{\psi}{a_{NN}}\right),
\end{aligned}$$

adică

$$\left\{\begin{aligned}
\int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial \psi}{\partial y_N} &= \int_{Q_+} \frac{1}{a_{NN}}\frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N}\frac{\partial w}{\partial y_N}\psi + \int_{Q_+} \frac{\tilde{g}}{a_{NN}}\psi \\
&\quad + \sum_{(k,\ell)\ne(N,N)} \int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial a_{k\ell}}{\partial y_\ell}\frac{\psi}{a_{NN}} \\
&\quad - \sum_{(k,\ell)\ne(N,N)} \int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_\ell}\left(\frac{a_{k\ell}}{a_{NN}}\psi\right).
\end{aligned}\right. \tag{69}$$

Combinând (67) ([36]) şi (69) obţinem

$$\left|\int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial \psi}{\partial y_N}\right| \le C(\|w\|_{H^1} + \|\tilde{g}\|_{L^2})\|\psi\|_{L^2} \quad \forall \psi \in C_c^1(Q_+),$$

[36] Folosim (67) cu $\dfrac{a_{k\ell}}{a_{NN}}\psi$ în loc de ψ.

de unde (68).

REMARCA 26. – Fie Ω un deschis oarecare şi $u \in H^1(\Omega)$ astfel încât

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Presupunem că $f \in H^m(\Omega)$. Atunci $\theta u \in H^{m+2}(\Omega)$ pentru orice $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$: spunem că $u \in H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ [pentru a demonstra acest lucru e suficient să reluăm estimările a priori din cazul C_1 şi să raţionăm prin inducţie în raport cu m]. In particular, dacă $f \in C^\infty(\Omega)$ atunci $u \in C^\infty(\Omega)$ ([37]).

Aceeaşi concluzie rămâne valabilă pentru o **soluţie foarte slabă**, adică o funcţie $u \in L^2(\Omega)$ astfel încât

$$-\int_\Omega u\Delta\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

(demonstraţia este puţin mai delicată; vezi de exemplu Agmon [1].) Insistăm asupra caracterului **local** al teoremelor de regularitate. Fie $f \in L^2(\Omega)$ şi fie $u \in H_0^1(\Omega)$ unica soluţie a problemei

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Fixăm $\omega \subset\subset \Omega$; atunci $u_{|\omega}$ depinde de **valorile lui f pe întregul Ω – şi nu doar de valorile lui f pe ω** ([38]). Din contră, **regularitatea lui $u_{|\omega}$ depinde doar de regularitatea lui** $f_{|\omega}$; de exemplu $f \in C^\infty(\omega) \Rightarrow u \in C^\infty(\omega)$ chiar dacă f este foarte neregulată în afara lui ω. [Spunem că Δ este hipoeliptic].

REMARCA 27. – Rezultatele de regularitate sunt, dintr-un anumit punct de vedere, puţin surprinzătoare. Intr-adevăr, o ipoteză făcută asupra lui Δu, adică asupra **sumei** derivatelor $\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, antrenează o concluzie de aceeaşi natură asupra **tuturor derivatelor** $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ considerate **în mod individual**.

[37]**Dar, în general,** $u \notin C(\overline{\Omega})$ (chiar dacă Ω este de clasă C^∞) deoarece condiţia pe frontieră nu a fost prescrisă.

[38]De exemplu, dacă $f \geq 0$ în Ω, $f \not\equiv 0$ şi $f = 0$ în ω avem totuşi întotdeauna $u > 0$ în ω (vezi principiul tare de maxim în comentariile cu privire la acest capitol).

IX.7 Principiul de maxim

Principiul de maxim este un instrument foarte util ce admite mai multe formulări. Expunem aici unele forme simple.

Fie Ω o submulţime deschisă oarecare a lui $\mathbf{R}^N$.

• **Teorema IX.27 (Principiul de maxim pentru problema Dirichlet). – Presupunem că** ([39])

$$f \in L^2(\Omega) \quad \textbf{şi} \quad u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

satisfac

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{70}$$

Atunci, pentru orice $x \in \Omega$**,**

$$\operatorname{Min}\{\operatorname{Inf}_\Gamma u, \operatorname{Inf}_\Omega f\} \leq u(x) \leq \operatorname{Max}\{\operatorname{Sup}_\Gamma u, \operatorname{Sup}_\Omega f\}.$$

Aici şi în ceea ce urmează, Sup = Sup ess şi Inf = Inf ess.]

DEMONSTRAŢIE. – Utilizăm **metoda troncaturilor a lui Stampacchia**. Fixăm o funcţie $G \in C^1(\mathbf{R})$ astfel încât

(i) $|G'(s)| \leq M \quad \forall s \in \mathbf{R}$,

(ii) G este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$,

(iii) $G(s) = 0 \quad \forall s \leq 0$.

Definim

$$K = \operatorname{Max}\{\operatorname{Sup}_\Gamma u, \operatorname{Sup}_\Omega f\}$$

şi presupunem $K < \infty$ (altfel nu am avea nimic de demonstrat). Fie $v = G(u - K)$.

Vom distinge două cazuri:

a) **Cazul** $|\Omega| < \infty$**.**

Atunci $v \in H^1(\Omega)$ (din propoziţia IX.5 aplicată funcţiei $t \mapsto G(t - K) - G(-K)$). Pe de altă parte, $v \in H_0^1(\Omega)$ deoarece $v \in C(\overline{\Omega})$ şi $v = 0$

[39]Dacă Ω este de clasă C^1 se poate elimina presupunerea $u \in C(\overline{\Omega})$ apelând la **teoria de urmă** care dă un sens lui $u_{|\Gamma}$ (a se vedea comentariile de la sfârşitul acestui capitol); de asemenea, dacă $u \in H_0^1(\Omega)$ presupunerea $u \in C(\overline{\Omega})$ poate fi eliminată.

pe Γ (vezi teorema IX.17). Introducem acest v în (70) şi procedăm ca în demonstraţia teoremei VIII.17.

b) **Cazul $|\Omega| = \infty$.**

Avem atunci $K \geq 0$ (deoarece $f(x) \leq K$ a.p.t. în Ω şi $f \in L^2(\Omega)$ implică $K \geq 0$). Fixăm $K' > K$. Din propoziţia IX.5 aplicată funcţiei $t \mapsto G(t - K')$ vedem că $v = G(u - K') \in H^1(\Omega)$. Mai mult, $v \in C(\overline{\Omega})$ şi $v = 0$ pe Γ; astfel $v \in H_0^1(\Omega)$. Introducând acest v în (70) avem

$$(71) \qquad \int_\Omega |\nabla u|^2 G'(u - K') + \int_\Omega uG(u - K') = \int_\Omega fG(u - K').$$

Pe de altă parte, $G(u - K') \in L^1(\Omega)$ deoarece ([40])

$$0 \leq G(u - K') \leq M|u|$$

şi, pe mulţimea $[u \geq K'] = \{x \in \Omega;\ u(x) \geq K'\}$ avem

$$K' \int_{[u \geq K']} |u| \leq \int_\Omega u^2 < \infty.$$

Deducem din (71) că

$$\int_\Omega (u - K')G(u - K') \leq \int_\Omega (f - K')G(u - K') \leq 0.$$

Urmează că $u \leq K'$ a.p.t. în Ω şi astfel $u \leq K$ a.p.t. în Ω (deoarece $K' > K$ este arbitrar.)

• **Corolarul IX.28**. – **Luăm $f \in L^2(\Omega)$ şi $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ([41]) să satisfacă (70). Avem**

$$(72) \qquad (u \geq 0 \textbf{ pe } \Gamma \quad \textbf{şi} \quad f \geq 0 \textbf{ în } \Omega) \Rightarrow (u \geq 0 \textbf{ în } \Omega),$$

$$(73) \qquad \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \text{Max}\,\{\|u\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\}.$$

In particular,

$$(74) \qquad \textbf{dacă } f = 0 \textbf{ în } \Omega \textbf{ atunci } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Gamma)}$$

[40]Deoarece $G(u - K') - G(-K') \leq M|u|$ şi $G(-K') = 0$ atunci când $-K' < 0$.

[41]Ca mai înainte, presupunerea $u \in C(\overline{\Omega})$ poate fi eliminată în unele cazuri.

(75) **dacă** $u = 0$ **pe** Γ **atunci** $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

REMARCA 28. – Dacă Ω este mărginit şi u este o soluţie **clasică** a ecuaţiei

$$-\Delta u + u = f \quad \text{în } \Omega \tag{76}$$

se poate da o altă demonstraţie a teoremei IX.27. Intr-adevăr, fie $x_0 \in \overline{\Omega}$ un punct astfel încât $u(x_0) = \text{Max}_{\overline{\Omega}} u$.

i) Dacă $x_0 \in \Gamma$, atunci $u(x_0) \leq \text{Sup}_\Gamma u$.

ii) Dacă $x_0 \in \Omega$, atunci $\nabla u(x_0) = 0$ şi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0)$, pentru orice $1 \leq i \leq N$, aşa încât $\Delta u(x_0) \leq 0$. Din aceasta, utilizând ecuaţia (76) avem $u(x_0) = f(x_0) + \Delta u(x_0) \leq f(x_0)$.

Această metodă are avantajul că se aplică la ecuaţiile eliptice de ordinul al doilea generale:

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + u = f \quad \text{în } \Omega. \tag{77}$$

Punctăm că dacă $x_0 \in \Omega$, atunci

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \leq 0;$$

Intr-adevăr, printr-o schimbare de coordonate (depinzând de x_0) se poate reduce la cazul când matricea $a_{ij}(x_0)$ este diagonală. Concluzia teoremei IX.27 rămâne adevărată pentru soluţiile slabe ale lui (77), dar demonstraţia este mai delicată; a se vedea Gilbarg-Trudinger [1].

• **Propoziţia IX.29. – Presupunem că funcţiile** $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ **satisfac condiţia de elipticitate (36) şi că** a_i, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ **cu** $a_0 \geq 0$ **în** Ω. **Fie** $f \in L^2(\Omega)$ **şi** $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ([42]) **astfel încât**

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \int_\Omega \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega a_0 u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{78}$$

[42] Ca mai înainte, presupunerea $u \in C(\overline{\Omega})$ poate fi eliminată în unele cazuri.

Atunci

$$(79) \qquad (u \geq 0 \textbf{ pe } \Gamma \quad \textbf{şi} \quad f \geq 0 \textbf{ în } \Omega) \Rightarrow (u \geq 0 \textbf{ în } \Omega).$$

Presupunem că $a_0 \equiv 0$ şi că Ω este mărginit. Atunci

$$(80) \qquad (f \geq 0 \textbf{ în } \Omega) \Rightarrow (u \geq \mathrm{Inf}_\Gamma u \textbf{ în } \Omega)$$

şi

$$(81) \qquad (f = 0 \textbf{ în } \Omega) \Rightarrow (\mathrm{Inf}_\Gamma \leq u \leq \mathrm{Sup}_\Gamma u \textbf{ în } \Omega)\,.$$

Demonstraţie. – Demonstrăm acest rezultat în cazul $a_i \equiv 0$, $1 \leq i \leq N$; cazul general este mai delicat (a se vedea Gilbarg-Trudinger, Teorema 8.1). A stabili (79) este acelaşi lucru cu a arăta că

$$(79') \qquad (u \leq 0 \text{ pe } \Gamma \quad \text{şi} \quad f \leq 0 \text{ pe } \Omega) \Rightarrow (u \leq 0 \text{ în } \Omega).$$

Alegem $\varphi = G(u)$ în (78) cu G ca în demonstraţia teoremei IX.27; obţinem astfel

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} G'(u) \leq 0$$

şi deci

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 G'(u) \leq 0.$$

Definim $H(t) = \displaystyle\int_0^t [G'(s)]^{1/2}\, ds$; aşa încât

$$H(u) \in H_0^1(\Omega) \quad \text{şi} \quad |\nabla H(u)|^2 = |\nabla u|^2 G'(u) = 0.$$

Urmează că $H(u) = 0$ în Ω ([43]) şi de aici $u \leq 0$ în Ω.

Demonstrăm acum (80) în forma următoare

$$(80') \qquad (f \leq 0 \text{ în } \Omega) \Rightarrow (u \leq \mathrm{Sup}_\Gamma u \text{ în } \Omega).$$

Definim $K = \mathrm{Sup}_\Gamma u$; atunci $(u - K)$ satisface (78) deoarece $a_0 \equiv 0$ şi $(u - K) \in H^1(\Omega)$ pentru că Ω este mărginit. Aplicând (79′) obţinem $u - K \leq 0$ în Ω, adică (80′). In final, (81) urmează din (80) şi (80′).

[43]Subliniem că dacă $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \leq p < \infty$ şi $\nabla f = 0$ în Ω, atunci $f = 0$ în Ω. Intr-adevăr, fie $\bar{f}$ prelungirea lui f cu 0 în afara lui Ω; atunci $f \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ şi $\nabla \bar{f} = \overline{\nabla f} = 0$ (vezi propoziţia IX.18). Ca o consecinţă $\bar{f}$ este constantă (vezi remarca 8) şi deoarece $\bar{f} \in L^p(\mathbf{R}^N)$, $\bar{f} \equiv 0$.

Propoziţia IX.30. (Principiul de maxim pentru problema Neumann). – Fie $f \in L^2(\Omega)$ şi $u \in H^1(\Omega)$ astfel încât

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Atunci avem, pentru a.p.t. $x \in \Omega$,

$$\mathrm{Inf}_\Omega f \le u(x) \le \mathrm{Sup}_\Omega f.$$

Demonstraţie. – Aceasta este similară cu aceea a teoremei IX.27.

IX.8 Funcţii proprii şi descompunere spectrală

In această secţiune presupunem că Ω este o mulţime deschisă **mărginită**.

• **Teorema IX.31. – Există o bază Hilbertiană $(e_n)_{n\ge 1}$ a lui $L^2(\Omega)$ şi un şir $(\lambda_n)_{n\ge 1}$ de numere reale cu $\lambda_n > 0 \quad \forall n$ şi $\lambda_n \to +\infty$ astfel încât**

$$e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega), \tag{82}$$

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n \text{ în } \Omega. \tag{83}$$

Spunem că (λ_n) sunt *valorile proprii ale lui $-\Delta$ (cu condiţia Dirichlet pe frontieră)* **şi că (e_n) sunt** *funcţiile proprii* **asociate.**

Demonstraţie. – Pentru $f \in L^2(\Omega)$ dat, notăm $u = Tf$ unica soluţie $u \in H_0^1(\Omega)$ a problemei

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{84}$$

Considerăm T ca un operator de la $L^2(\Omega)$ în $L^2(\Omega)$. T este un operator compact autoadjunct (repetaţi demonstraţia teoremei VIII.20 şi utilizaţi faptul că $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ cu injecţia compactă). Pe de altă parte, $N(T) = \{0\}$ şi $(Tf, f)_{L^2} \ge 0 \quad \forall f \in L^2$. Concluzionăm (aplicând teorema VI.11) că L^2 admite o bază Hilbertiană (e_n) formată din funcţii proprii ale lui T asociate valorilor proprii (μ_n) cu $\mu_n > 0$ şi $\mu_n \to 0$. Astfel avem $e_n \in H_0^1(\Omega)$ şi

$$\int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{\mu_n} \int_\Omega e_n \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Cu alte cuvinte, e_n este o soluţie slabă a lui (83) cu $\lambda_n = 1/\mu_n$. Din rezultatele de regularitate ale lui §IX.6 (a se vedea remarca 26) ştim că $e_n \in H^2(\omega)$ pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$. Urmează că $e_n \in H^4(\omega)$ pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$ şi atunci $e_n \in H^6(\omega)$ pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$, etc. Astfel $e_n \in \cap_{m\geq 1} H^m(\omega)$ pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$. In consecinţă, $e_n \in C^\infty(\omega)$ pentru orice $\omega \subset\subset \Omega$, adică $e_n \in C^\infty(\Omega)$.

Remarca 29. – In ipotezele teoremei IX.31 şirul $(e_n/\sqrt{\lambda_n})$ este o **bază Hilbertiană** a lui $H_0^1(\Omega)$ înzestrat cu produsul scalar $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ [respectiv $(e_n/\sqrt{\lambda_n + 1})$ este o bază Hilbertiană a lui H_0^1 înzestrat cu produsul scalar $\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)$]. Intr-adevăr, este limpede că şirul $(e_n/\sqrt{\lambda_n})$ este ortonormal în $H_0^1(\Omega)$ (a se utiliza (83)). Rămâne de verificat că spaţiul vectorial generat de (e_n) este dens în $H_0^1(\Omega)$. Deci, fie $f \in H_0^1(\Omega)$ astfel încât $(f, e_n)_{H_0^1} = 0 \quad \forall n$. Trebuie să demonstrăm că $f = 0$. Din (83) avem $\lambda_n \int e_n f = 0 \quad \forall n$ şi în consecinţă $f = 0$ (deoarece (e_n) este o bază Hilbertiană a lui $L^2(\Omega)$).

Remarca 30. – In ipotezele teoremei IX.31 se poate demonstra că $e_n \in L^\infty(\Omega)$ (vezi [EX]). Pe de altă parte, dacă Ω este de clasă C^∞ atunci $e_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$; acest rezultat urmează uşor din teorema IX.25.

Remarca 31. – Presupunem că funcţiile $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ satisfac condiţia de elipticitate (36) şi fie $a_0 \in L^\infty(\Omega)$. Atunci există o bază Hilbertiană (e_n) a lui $L^2(\Omega)$ şi un şir (λ_n) de numere reale cu $\lambda_n \to +\infty$ astfel încât $e_n \in H_0^1(\Omega)$ şi

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial e_n}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 e_n \varphi = \lambda_n \int_\Omega e_n \varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

IX.9 Comentarii asupra capitolului IX

Acest capitol este o **introducere** în teoria spaţiilor Sobolev şi a ecuaţiilor eliptice. Cititorul care doreşte să aprofundeze acest subiect larg poate consulta o vastă bibliografie; cităm printre alţii, Agmon [1], Bers-John-Schechter [1], Lions [1], Lions-Magenes [1], Friedman [2], Miranda [1], Folland [1], Treves [4], Adams [1], Gilbarg-Trudinger [1], Stampacchia [1], Courant-Hilbert [1] Vol. 2, Weinberger [1], Nirenberg [1] şi referinţele din interiorul acestor lucrări.

1) In capitolul IX am presupus adeseori că Ω este de clasă C^1; această presupunere exclude de exemplu domeniile cu "colţuri". In diverse situaţii se poate slăbi această ipoteză şi înlocui prin condiţii mai degrabă "exotice": Ω este de clasă C^1 pe porţiuni, Ω este Lipschitzian, Ω are proprietatea conului, Ω are proprietatea segmentului etc.; a se vedea, de exemplu, Adams [1], Agmon [1], Nečas [1].

2) Teorema IX.7 (existenţa unui operator de prelungire) se extinde la spaţiile $W^{m,p}(\Omega)$ (Ω de clasă C^m) cu ajutorul unei **generalizări adecvate a tehnicii de prelungire prin reflexie**; a se vedea Adams [1], Agmon [1], Nečas [1].

3) Aici sunt câteva inegalităţi foarte utile pentru normele Sobolev:

• A) **Inegalitatea lui Poincaré-Wirtinger. – Fie Ω o mulţime deschisă conexă de clasă C^1 şi fie $1 \le p \le \infty$. Atunci există o constantă C astfel încât**

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p} \le c\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \textbf{unde} \quad \bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u.$$

Din aceasta se deduce, datorită inegalităţii lui Sobolev, că dacă $p < N$,

$$\|u - \bar{u}\|_{L^{p^*}} \le c\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Vezi, de exemplu [EX].

• B) **Inegalitatea lui Hardy. – Fie Ω o mulţime deschisă, mărginită de clasă C^1 şi fie $1 < p < \infty$. Fie $d(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma)$. Există o constantă C astfel încât**

$$\left\|\frac{u}{d}\right\|_{L^p} \le C\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Reciproc,

$$(u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \textbf{şi} \quad (u/d) \in L^p(\Omega)) \Rightarrow (u \in W_0^{1,p}(\Omega)).$$

A se vedea Lions-Magenes [1] şi [EX] pentru cazul $p = 2$.

• C) **Inegalităţile de interpolare ale lui Gagliardo-Nirenberg**. Menţionăm doar **câteva exemple** care sunt frecvent întâlnite în aplicaţii. Pentru cazul general vezi Nirenberg [1] sau Friedman [2]. (Unele din aceste inegalităţi sunt demonstrate în [EX]).

Pentru a fixa ideile, fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă mărginită regulată.

Exemplul 1. – Fie $u \in L^p(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega)$ cu $1 \leq p \leq \infty$ şi $1 \leq r \leq \infty$. Atunci $u \in W^{1,q}(\Omega)$ unde q este **media armonică** a lui p şi r, adică $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r}\right)$, şi

$$\|Du\|_{L^q} \leq C\|u\|_{W^{2,r}}^{1/2}\|u\|_{L^p}^{1/2}.$$

Cazuri particulare: a) $p = \infty$ şi, de aceea, $q = 2r$. Avem

$$\|Du\|_{L^{2r}} \leq C\|u\|_{W^{2,r}}^{1/2}\|u\|_{L^\infty}^{1/2}.$$

Această inegalitate poate fi utilizată, printre altele pentru a arăta că $W^{2,r} \cap L^\infty$ este o **algebră**, altfel spus

$$u, v \in W^{2,r} \cap L^\infty \Rightarrow uv \in W^{2,r} \cap L^\infty$$

[această proprietate rămâne adevărată pentru $W^{m,r} \cap L^\infty$ cu m întreg, $m \geq 2$].

b) $p = q = r$. Avem

$$\|Du\|_{L^p} \leq C\|u\|_{W^{2,p}}^{1/2}\|u\|_{L^p}^{1/2}.$$

De aici se poate deduce, in particular, că

$$\|Du\|_{L^p} \leq \varepsilon\|D^2u\|_{L^p} + C_\varepsilon\|u\|_{L^p} \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Exemplul 2. – Fie $1 \leq q \leq p < \infty$. Atunci

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^q}^{1-a}\|u\|_{W^{1,N}}^{a} \quad \forall u \in W^{1,N}(\Omega), \qquad \text{unde} \quad a = 1 - \frac{q}{p}. \tag{85}$$

Subliniem cazul particular care este **frecvent utilizat**

$$N = 2, p = 4,\ q = 2 \text{ şi } a = \frac{1}{2},$$

altfel spus

$$\|u\|_{L^4} \leq C\|u\|_{L^2}^{1/2}\|u\|_{H^1}^{1/2} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Remarcăm, în această relaţie, că am utilizat de asemenea inegalitatea de interpolare uzuală (remarca 2 din capitolul IV)

$$\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^q}^{1-a}\|u\|_{L^\infty}^{a} \text{ cu } \ a = 1 - \frac{q}{p}$$

dar aceasta nu implică (85) deoarece $W^{1,N}$ nu este conţinut în L^∞.

Exemplul 3. – Fie $1 \leq q \leq p \leq \infty$ şi $r > N$. Atunci

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^q}^{1-a}\|u\|_{W^{1,r}}^{a} \quad \forall u \in W^{1,r}(\Omega) \tag{86}$$

unde $a = (1/q - 1/p)\,/\,(1/q + 1/N - 1/r)$.

• **4) Următoarea proprietate este uneori utilă**. Fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cu $1 \leq p \leq \infty$ şi Ω orice mulţime deschisă. Atunci $\nabla u = 0$ a.p.t. pe mulţimea $\{x \in \Omega;\ u(x) = k\}$ unde k este orice constantă; vezi Stampacchia [1] sau [EX].

$\star$ **5)** Funcţiile din $W^{1,p}(\Omega)$ sunt **diferenţiabile** în sensul uzual a.p.t. în Ω când $p > N$. Mai precis, fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ cu $p > N$. Atunci există o mulţime $A \subset \Omega$ de măsură zero astfel încât

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x) - h \cdot \nabla u(x)}{|h|} = 0 \quad \forall x \in \Omega \backslash A.$$

Această proprietate **nu** este valabilă când $u \in W^{1,p}(\Omega)$ şi $p \leq N$ $(N > 1)$. Asupra acestei chestiuni a se consulta Stein [1] (capitolul 8).

6) **Spaţii Sobolev fracţionare**. Se poate defini o familie de spaţii intermediare între $L^p(\Omega)$ şi $W^{1,p}(\Omega)$. Mai precis dacă $0 < s < 1$ $(s \in \mathbf{R})$ şi $1 \leq p < \infty$ definim

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega);\ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{s + (N/p)}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\},$$

înzestrat cu norma naturală. Definim $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$. Pentru studii asupra acestor spaţii, vezi Adams [1], Lions-Magenes [2], Malliavin [1]. Spaţiile $W^{s,p}(\Omega)$ pot fi, de asemenea, definite ca spaţii de **interpolare** între $W^{1,p}$ şi L^p, şi, de asemenea, utilizând **transformata Fourier** dacă $p = 2$ şi $\Omega = \mathbf{R}^N$.

In fine, definim $W^{s,p}(\Omega)$ pentru $s > 1$ real, diferit de un întreg, după cum urmează. Scriem $s = m + \sigma$ cu $m =$ partea **întreagă** a lui s, şi definim

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega); D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \quad \forall\alpha \quad \text{cu} \quad |\alpha| = m\}.$$

Cu ajutorul hărţilor locale se poate, de asemenea, defini $W^{s,p}(\Gamma)$ unde Γ este o **varietate netedă** (de exemplu frontiera unei mulţimi deschise regulate). Aceste spaţii joacă un rol important în teoria de urmă (vezi comentariul 7).

• **7) Teoria de urmă**. – Fie $1 \le p < \infty$. Incepem cu o lemă fundamentală:

Lema IX.9. – Fie $\Omega = \mathbf{R}^N_+$. Există o constantă C astfel încât

$$\left(\int_{\mathbf{R}^{N-1}} |u(x',0)|^p \, dx'\right)^{1/p} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in C^1_c(\mathbf{R}^N).$$

Demonstraţie. – Fie $G(t) = |t|^{p-1}t$ şi $u \in C^1_c(\mathbf{R}^N)$. Avem

$$\begin{aligned} G(u(x',0)) &= -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_N} G(u(x',x_N))\, dx_N \\ &= -\int_0^{+\infty} G'(u(x',x_N)) \frac{\partial u}{\partial x_N}(x',x_N)\, dx_N. \end{aligned}$$

De aceea

$$\begin{aligned} |u(x',0)|^p &\le p\int_0^\infty |u(x',x_N)|^{p-1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',x_N)\right| dx_N \\ &\le C\left[\int_0^\infty |u(x',x_N)|^p \, dx_N + \int_0^\infty \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',x_N)\right|^p dx_N\right] \end{aligned}$$

şi concluzia urmează prin integrarea în $x' \in \mathbf{R}^{N-1}$.

Se poate deduce din Lema IX.9 că aplicaţia $u \mapsto u_{|\Gamma}$ cu $\Gamma = \partial\Omega = \mathbf{R}^{N-1} \times \{0\}$ definită de la $C^1_c(\mathbf{R}^N)$ în $L^p(\Gamma)$, se extinde, prin densitate, la un operator liniar mărginit al lui $W^{1,p}(\Omega)$ în $L^p(\Gamma)$. Acest operator este, prin definiţie, **urma** lui u pe Γ; aceasta este, de asemenea, notată $u_{|\Gamma}$.

Remarcăm că există o **diferenţă fundamentală** între $L^p(\mathbf{R}^N_+)$ şi $W^{1,p}(\mathbf{R}^N_+)$; **funcţiile din** $L^p(\mathbf{R}^N_+)$ **nu au o urmă pe** Γ. Se poate uşor imagina—utilizând hărţi locale—cum se defineşte urma pe $\Gamma = \partial\Omega$, pentru o funcţie $u \in W^{1,p}(\Omega)$ când Ω este o mulţime **deschisă netedă** din $\mathbf{R}^N$ (de exemplu, Ω de clasă C^1 cu Γ mărginită). In acest caz $u_{|\Gamma} \in L^p(\Gamma)$ (pentru măsura de suprafaţă $d\sigma$). Cele mai importante proprietăţi ale urmei sunt următoarele:

i) Dacă $u \in W^{1,p}(\Omega)$, atunci, de fapt $u_{|\Gamma} \in W^{1-(1/p),p}(\Gamma)$ şi

$$\|u_{|\Gamma}\|_{W^{1-(1/p),p}(\Gamma)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Mai mult, operatorul urmă $u \mapsto u_{|\Gamma}$ este **surjectiv** de la $W^{1,p}(\Omega)$ la $W^{1-(1/p),p}(\Gamma)$.

ii) **Nucleul** operatorului urmă este $W_0^{1,p}(\Omega)$, adică

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) |\ u_{|\Gamma} = 0\}.$$

iii) Avem **formula lui Green**:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Gamma uv(\vec{n} \cdot \vec{e_i}) d\sigma \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei exterioare la Γ. Punctăm că integrala de suprafaţă are un înţeles deoarece $u, v \in L^2(\Gamma)$.

In acelaşi mod putem vorbi de $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ pentru o funcţie $u \in W^{2,p}(\Omega)$: definim $\dfrac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u)_{|\Gamma} \cdot \vec{n}$, care are un sens deoarece $(\nabla u)_{|\Gamma} \in L^p(\Gamma)^N$, şi $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^p(\Gamma)$ (de fapt $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in W^{1-(1/p),p}(\Gamma)$). De asemenea, formula lui Green este valabilă

$$-\int_\Omega \Delta u\, v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma \quad \forall u, v \in H^2(\Omega).$$

iv) Operatorul $u \mapsto \left\{ u_{|\Gamma}, \dfrac{\partial u}{\partial n} \right\}$ este mărginit, liniar şi surjectiv de la $W^{2,p}(\Omega)$ în spaţiul $W^{2-(1/p),p}(\Gamma) \times W^{1-(1/p),p}(\Gamma)$. Asupra acestor chestiuni, vezi Lions-Magenes [1] pentru cazul $p = 2$ (şi referinţele citate acolo pentru $p \neq 2$).

8) Operatori de ordinul $2m$ şi sisteme eliptice. – Rezultatele de existenţă şi regularitate demonstrate în capitolul IX se extind la operatori eliptici de ordinul $2m$ şi la sisteme eliptice ([44]). Unul din ingredientele esenţiale este **inegalitatea lui Gårding**. Asupra acestor probleme, vezi Agmon [1], Nečas [1], Lions-Magenes [1], Agmon-Douglis–Nirenberg [1]. Operatorii de ordin $2m$ şi unele sisteme joacă un rol important în mecanică şi fizică. Semnalăm, în particular, **operatorul biarmonic** Δ^2 (teoria plăcilor), **sistemul de elasticitate** şi **sistemul lui Stokes** (mecanica fluidelor); vezi de exemplu Ciarlet [1], Duvant-Lions [1], Temam [1], Nečas-Hlavaček [1], Gurtin [1].

a) **Regularitatea în spaţiile L^p şi $C^{0,\alpha}$**. Teoremele de regularitate demonstrate în capitolul IX pentru $p = 2$ se extind la cazul $p \neq 2$.

• **Teorema IX.32 (Agmon-Douglis-Nirenberg [1]). – Presupunem că Ω este de clasă C^2 cu Γ mărginită. Fie $1 < p < \infty$, atunci pentru orice $f \in L^p(\Omega)$, există o soluţie unică $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ a ecuaţiei**

$$-\Delta u + u = f \quad \textbf{în } \Omega. \tag{87}$$

Mai mult, dacă Ω este de clasă C^{m+2} şi $f \in W^{m,p}(\Omega)$ ($m \geq 1$ un întreg), atunci

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad \textbf{şi} \quad \|u\|_{W^{m+2,p}} \leq C\|f\|_{W^{m,p}}.$$

Există un rezultat analog dacă (87) este înlocuită de o ecuaţie eliptică de ordinul doi cu coeficienţi netezi. Demonstraţia teoremei IX.32 este **considerabil mai complicată** decât în cazul $p = 2$ (teorema IX.25). Aceasta utilizează în mod esenţial două ingrediente:

a) O formulă pentru o **reprezentare explicită** a lui u utilizând soluţia fundamentală. De exemplu dacă $\Omega = \mathbf{R}^3$, atunci soluţia lui (87) este dată de $u = G * f$ unde $G(x) = \dfrac{c}{|x|}e^{-|x|}$ (vezi [EX]). Aşa încât, formal, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} * f$; "din nefericire" $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}$ nu aparţine lui $L^1(\mathbf{R}^3)$, ([45])

[44]Dar **nu şi principiul de maxim**, în afara de cazurile foarte speciale.

[45]Dar foarte aproape!

din cauza singularităţii în $x = 0$, şi nu se pot aplica estimările elementare asupra produselor de convoluţie (ca de exemplu teorema 4.15).

b) Pentru a depăşi această dificultate se utilizează **teoria integralelor singulare din L^p datorată lui Calderon-Zygmund** (vezi de exemplu Stein [1], Bers-John-Schechter [1] şi Gilbarg-Trudinger [1]). Atenţie: concluzia teoremei IX.32 **este falsă** pentru $p = 1$ şi $p = \infty$.

Un alt rezultat de regularitate fundamental, în cadrul de lucru al spaţiilor Hölder ([46]) este următorul:

• **Teorema IX.33 (Schauder). – Presupunem că Ω este mărginit şi de clasă $C^{2,\alpha}$ cu $0 < \alpha < 1$. Atunci pentru orice $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ există o soluţie unică $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ a problemei**

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \textbf{în } \Omega, \\ u = 0 & \textbf{pe } \Gamma. \end{cases} \tag{88}$$

Mai mult, dacă Ω este de clasă $C^{m+2,\alpha}$($m \geq 1$ un întreg) şi $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, atunci

$$u \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \textbf{cu} \quad \|u\|_{C^{m+2,\alpha}} \leq C\|f\|_{C^{m,\alpha}}.$$

Un rezultat analog se menţine dacă (88) este satisfăcută de un operator eliptic de ordinul doi cu coeficienţi netezi. Demonstraţia teoremei IX.33 se bazează—precum aceea a teoremei IX.32—pe o reprezentare explicită a lui u şi pe **teoria integralelor singulare din** spaţiile $C^{0,\alpha}$ datorată lui Hölder, Korn, Lichtenstein, Giraud. Asupra acestui subiect, a se vedea Agmon-Douglis-Nirenberg [1], Bers-John-Schechter [1], Gilbarg-Trudinger [1] şi, de asemenea, abordarea elementară dezvoltată recent de A. Brandt [1] (bazată **numai** pe principiul de maximum).

Fie Ω o mulţime deschisă, regulată, mărginită şi $f \in C(\overline{\Omega})$. Din teorema IX.32 există $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ (pentru orice $1 < p < \infty$)

[46] Reamintim că

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega});\ \mathrm{Sup}_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$$

şi $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}); D^\beta u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \forall\beta \quad \text{cu} \quad |\beta| = m\}$.

care este soluţia unică a lui (87). In particular, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ pentru orice $0 < \alpha < 1$ (din teorema lui Morrey (teorema IX.12)). In general, u **nu aparţine** lui C^2, nici chiar lui $W^{2,\infty}$. Aceasta explică de ce **adeseori evităm să lucrăm în spaţiile** $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ şi $C(\overline{\Omega})$, spaţii în care nu avem rezultate de regularitate optimale.

Teoremele IX.32 şi IX.33 se extind la operatori eliptici de ordinul $2m$ şi la sisteme eliptice; vezi Agmon-Douglis-Nirenberg [1]. Punctăm, în final, într-o direcţie diferită, că ecuaţiile eliptice de ordinul doi cu coeficienţi discontinui reprezintă o temă larg studiată. Cităm, de exemplu, următorul rezultat:

• **Teorema IX.34 (De Giorgi, Stampacchia). – Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă, regulată, mărginită. Presupunem că funcţiile $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ satisfac condiţia de elipticitate (36). Fie $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ cu $p > N/2$ şi $u \in H_0^1(\Omega)$ astfel încât**

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Atunci $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pentru un anumit $0 < \alpha < 1$ (care depinde de Ω, a_{ij} şi p).

Asupra acestor chestiuni, a se vedea Stampacchia [1],
Gilbarg-Trudinger [1] şi Ladyzhenskaya-Uraltseva [1].

10) Unele inconveniente ale metodei variaţionale şi cum să le evităm!

Metoda variaţională permite să stabilim foarte uşor existenţa unei soluţii slabe. Nu este întotdeauna aplicabilă, dar aceasta poate fi completată. Indicăm două exemple. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă regulată şi mărginită.

a) **Metoda de dualitate** (sau transpoziţie). – Fie $f \in L^1(\Omega)$—sau chiar f o măsură (Radon) pe Ω—şi căutăm o soluţie a problemei

$$(89) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma. \end{cases}$$

De îndată ce $N > 1$ funcţionala liniară $\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi$ nu este definită pentru orice $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ şi ca o consecinţă **metoda variaţională este**

ineficace. Pe de altă parte, se poate utiliza următoarea tehnică. Notăm cu $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ operatorul $f \mapsto u$ (unde u este soluţia lui (89), care există pentru $f \in L^2(\Omega)$). Ştim că T este autoadjunct. Pe de altă parte (teorema IX.32) $T : L^p(\Omega) \to W^{2,p}(\Omega)$ pentru $2 \leq p < \infty$ şi datorită teoremelor lui Sobolev şi Morrey, $T : L^p(\Omega) \to C_0(\overline{\Omega})$ dacă $p > N/2$. **Din dualitate** deducem că

$$T^\star : M(\Omega) = C_0(\overline{\Omega})' \to L^{p'}(\Omega) \quad \text{dacă } p > N/2.$$

Deoarece T este autoadjunct în L^2, $T^\star$ este o prelungire a lui T; de aceea se poate considera $u = T^\star f$ ca o soluţie generalizată a lui (89). De fapt, dacă $f \in L^1(\Omega)$, atunci $u = T^\star f \in L^2(\Omega)$ pentru orice $q < N/(N-2)$; u este unica soluţie (foarte) slabă a lui (89) în următorul sens:

$$-\int_\Omega u\Delta\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in C^2(\overline{\Omega}), \varphi = 0 \quad \text{pe } \Gamma.$$

In acelaşi spirit, se poate studia (89) pentru f dat în $H^{-m}(\Omega)$; a se vedea Lions-Magenes [1].

b) **Metoda de densitate**. Fie $g \in C(\Gamma)$ şi căutăm o soluţie a problemei

$$(90) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{în } \Omega \\ u = g & \text{pe } \Gamma. \end{cases}$$

In general, dacă $g \in C(\Gamma)$, nu există o funcţie $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ astfel încât $\tilde{g}_{|\Gamma} = g$ (vezi comentariul 7 şi punctăm că $C(\Gamma)$ nu este conţinut în $H^{1/2}(\Gamma)$). Astfel nu este posibil să căutăm o soluţie a lui (90) în $H^1(\Omega)$: **metoda variaţională este ineficientă**. Cu toate acestea avem

• **Teorema IX.35. – Există o soluţie unică** $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ **a lui (90).**

Demonstraţie. – Fixăm $\tilde{g} \in C_c(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $\tilde{g}_{|\Gamma} = g$; $\tilde{g}$ există din teorema lui Tietze-Urysohn (vezi Dieudonné [1], L. Schwartz [2], Dugundji [1], Munkres [1]). Fie $(\tilde{g}_n)$ un şir în $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ astfel încât $\tilde{g}_n \to g$ uniform în $\mathbf{R}^N$. Definim $g_n = \tilde{g}_{n|\Gamma}$. Aplicând metoda variaţională şi rezultatele de regularitate vedem că există $u_n \in C^2(\overline{\Omega})$ o soluţie clasică a problemei

$$\begin{cases} -\Delta u_n + u_n = 0 & \text{în } \Omega, \\ u_n = g_n & \text{pe } \Gamma. \end{cases}$$

Din principiul de maxim (corolarul IX.28) avem

$$\|u_m - u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g_m - g_n\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

In consecinţă, (u_n) este un şir Cauchy în $C(\overline{\Omega})$ şi $u_n \to u$ în $C(\overline{\Omega})$. Este limpede că avem

$$\int_\Omega u(-\Delta\varphi + \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

şi, de aceea, $u \in C^\infty(\Omega)$ (a se vedea remarca 26). Astfel $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ satisface (90). Unicitatea soluţiei lui (90) urmează din principiul de maxim (vezi remarca 28).

$\star$ Remarca 32. – Este esenţial ca în teorema IX.35 să presupunem că Ω este suficient de neted. Când Ω are o frontieră "patologică" ne lovim de chestiuni ale teoriei potenţialului (puncte regulate, criteriul lui Wiener etc.).

O altă abordare pentru a rezolva (90) este **metoda lui Perron**, care este clasică în **teoria potenţialului**. Definim

$$u(x) = \text{Sup}\,\{v(x); v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega), -\Delta v + v \leq 0 \text{ în } \Omega \quad \text{şi} \quad v \leq g \text{ pe } \Gamma\}.$$

Se poate **demonstra** că u satisface (90).

O funcţie v astfel încât $-\Delta v + v \leq 0$ în Ω este numită **subarmonică**; dacă, mai mult, $v \leq g$ pe Γ atunci spunem că v este o **subsoluţie** a lui (90).

11) Principiul tare de maxim. – Putem întări concluzia propoziţiei IX.29 când u este o **soluţie clasică**. Mai precis, fie Ω o mulţime deschisă, regulată, mărginită, conexă. Fie $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfăcând condiţia de elipticitate (36), a_i, $a_0 \in C(\overline{\Omega})$ cu $a_0 \geq 0$ în Ω. Avem:

Teorema IX.36 (Hopf). – Fie $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfăcând

$$(91) \qquad -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \qquad \textbf{în } \Omega.$$

Presupunem că $f \geq 0$ în Ω. Dacă există $x_0 \in \Omega$ astfel încât $u(x_0) = \operatorname{Min}_\Omega u$ şi dacă $u(x_0) \leq 0$, ([47]) atunci u este constantă pe Ω (şi, mai mult, $f = 0$ pe Ω).

Pentru demonstraţie, a se vedea Bers-John-Schechter [1], Gilbarg-Trudinger [1] sau Protter-Weinberger [1].

Corolarul IX.37. – Fie $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfăcând (91) cu $f \geq 0$ în Ω. Presupunem că $u \geq 0$ pe Γ. Atunci

fie

i) $u > 0$ **în** Ω**,**

fie

ii) $u \equiv 0$ **în** Ω**.**

Pentru alte rezultate legate de principiul de maxim (inegalitatea lui Harnack etc.) vezi Stampacchia [1], Gilbarg-Trudinger [1], Protter-Weinberger [1], Sperb [1].

12) Operatorii lui Laplace-Beltrami. – Operatorii eliptici definiţi pe **varietăţi Riemanniene** (cu sau fără bord) şi, in particular, operatorul lui Laplace-Beltrami joacă un rol important în geometria diferenţială şi fizică; vezi de exemplu Choquet-De Witt-Dillard [1].

13) Proprietăţi spectrale. – Valorile proprii şi funcţiile proprii ale operatorilor eliptici de ordinul doi se bucură de un număr de proprietăţi remarcabile. Cităm aici unele dintre ele. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă regulată, mărginită, conexă. Fie $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfăcând condiţia de elipticitate (36) şi $a_0 \in C(\overline{\Omega})$. Fie A operatorul

$$Au = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0 u$$

cu condiţii omogene de tip Dirichlet ($u = 0$ pe Γ). Notăm cu (λ_n) şirul de valori proprii ale lui A aranjate în ordine crescătoare, cu $\lambda_n \to +\infty$ când $n \to \infty$. Atunci prima valoare proprie λ_1 are **multiplicitatea** 1 (se spune că λ_1 este o valoare proprie simplă) ([48] şi putem alege funcţia proprie asociată e_1 ca să avem $e_1 > 0$ în Ω; vezi teorema lui Krein-Rutman în comentariile asupra capitolului VI. Pe de altă parte se poate arăta că $\lambda_n \sim cn^{2/N}$ când $n \to \infty$ cu $c > 0$; vezi Agmon [1].

[47]Ipoteza $u(x_0) \leq 0$ nu este necesară dacă $a_0 = 0$.

[48]In dimensiune $N \geq 2$ celelalte valori proprii pot avea multiplicitatea > 1.

Relaţiile care există între **proprietăţile geometrice** ([49]) ale lui Ω şi spectrul lui A sunt subiect de cercetare intensivă, vezi Kac [1], Marcel Berger [1], Osserman [1], I.M. Singer [1]. Obiectivul este acela de a "**recupera**" **cantitatea maximă de informaţie despre** Ω **numai din cunoaşterea spectrului** (λ_n).

O problemă deschisă frapant de simplă este următoarea. Fie Ω_1 şi Ω_2 două domenii mărginite din $\mathbf{R}^2$; presupunem că valorile proprii ale operatorului $-\Delta$ (cu condiţii la limită de tip Dirichlet) sunt aceleaşi pentru Ω_1 şi Ω_2. Sunt Ω_1 şi Ω_2 izometrice? Această problemă a fost poreclită: "**Se poate afla forma unei tobe**?" ([50]) Se ştie că răspunsul este pozitiv dacă Ω_1 este un disc.

O altă chestiune importantă este următoarea. Considerăm operatorul $Au = -\Delta u + a_0 u$ (+ condiţii la limită). Ce proprietăţi ale lui a_0 pot fi "recuperate" din cunoaşterea spectrului lui A?

14) Probleme eliptice degenerate. – Considerăm probleme de forma

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \quad \text{în } \Omega \\ +\text{condiţii la limită pe } \Gamma \text{ sau pe o parte a lui } \Gamma, \end{cases}$$

unde funcţiile a_{ij} nu satisfac condiţia de elipticitate (36) ci numai

(36′) $\quad \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N.$

Asupra acestui subiect vast, consultaţi de exemplu lucrările lui Kohn-Nirenberg [1], Baouendi-Goulaouic [1], Oleinik-Radkevitch [1].

15) Probleme eliptice neliniare. – Există un domeniu uriaş de cercetare motivat de nenumăratele probleme din geometrie, mecanică, fizică, control optimal, teoria probabilităţilor, etc.. Acesta a avut o anumită dezvoltare spectaculoasă începând cu lucrările lui Leray şi Schauder de la inceputul anilor 1930. Distingem unele categorii:

[49] In particular când Ω este o varietate Riemanniană fără bord şi A este operatorul lui Laplace-Beltrami.

[50] Deoarece armonicele membranei ataşate frontierei Γ sunt funcţiile $e_n(x)\sin\sqrt{\lambda_n}t$ unde (λ_n, e_n) sunt valorile proprii şi funcţiile proprii ale lui $-\Delta$ cu condiţii Dirichlet pe frontieră.

a) **Probleme semiliniare**. Sunt incluse, de exemplu, probleme de forma:

$$\text{(92)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma, \end{cases}$$

unde $f(x,u)$ este o funcţie dată.

Această categorie include, printre altele, **probleme de bifurcaţie** unde se studiază structura mulţimii soluţiilor (λ, u) pentru problema

$$\text{(92')} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f_\lambda(x,u) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma, \end{cases}$$

cu λ un parametru variabil.

b) **Probleme cvasiliniare**. Considerăm probleme de forma

$$\text{(93)} \qquad \begin{cases} -\sum_{i,j} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,u,\nabla u)\dfrac{u}{\partial x_i}\right) = f(x,u,\nabla u) & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma. \end{cases}$$

unde funcţiile $a_{ij}(x,u,p)$ sunt eliptice, dar posibil degenerate; avem de exemplu

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x,u,p)\xi_i\xi_j \geq \alpha(u,p)|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N,$$

cu $\alpha(u,p) > 0 \quad \forall u \in \mathbf{R}, \quad \forall p \in \mathbf{R}^N$, dar $\alpha(u,p)$ nu este uniform mărginită inferior de o constantă $\alpha > 0$. De exemplu, **ecuaţia suprafeţelor minimale** intră în această categorie cu $a_{ij} = \delta_{ij}(1+|\nabla u|^2)^{-1/2}$. Mai general, se consideră probleme eliptice de forma

$$\text{(94)} \qquad F(x,u,Du,D^2u) = 0$$

unde matricea $\dfrac{\partial F}{\partial q_{ij}}(x,u,p,q)$ este eliptică (posibil degenerată). De exemplu **ecuaţia Monge-Ampère** intră în această categorie.

c) **Probleme de frontieră liberă**. Este vorba de a rezolva o ecuaţie eliptică liniară pe o **mulţime deschisă Ω care nu este dată**

a priori. Faptul că Ω este necunoscut este adeseori "compensat" prin a avea **două condiţii pe frontieră** Γ; de exemplu Dirichlet şi Neumann. Problema constă în a găsi **simultan** o mulţime **deschisă** Ω şi o funcţie u astfel încât ...

a) Există un număr de tehnici utilizate pentru problemele (92) sau (92′):

• **Metode de monotonie**, a se vedea Browder [1] şi Lions [3].

• **Metode topologice** (teorema de punct fix a lui Schauder, teoria gradului topologic Leray-Schauder etc.); vezi J.T. Schwartz [1], M. Krasnoselskii [1] şi L. Nirenberg [2], [3].

• **Metode variaţionale** (tehnici Min-max în teoria punctului critic, teoria Morse etc.); vezi Rabinowitz [1], [2], Melvyn Berger [1], M. Krasnoselskii [1], L. Nirenberg [3].

b) A rezolva probleme de tipul (93) poate implica tehnici complicate de estimări; ([51]) vezi lucrările lui De Giorgi, Bombieri, Miranda, Giusti, Ladyzhenskaya-Uraltseva, Serrin etc. descrise în Serrin [1], Bombieri [1] şi Gilbarg-Trudinger [1]. Progrese importante asupra ecuaţiilor complet neliniare şi asupra ecuaţiei Monge-Ampère au fost făcute recent; vezi Yau [1].

c) Privind **problemele de frontieră liberă** multe rezultate noi au apărut în ultimii ani, în principal în conexiune cu teoria **inegalităţilor variaţionale**; a se vedea Kindelherer-Stampacchia [1], Baiocchi-Capelo [1] (şi lucrările "şcolii din Pavia" citate în această lucrare), Free Boundary Problems [1], [2].

[51] Este, de exemplu, cazul ecuaţiei suprafeţei minimale.

Capitolul X

PROBLEME DE EVOLUŢIE: ECUAŢIA CĂLDURII ŞI ECUAŢIA UNDELOR

X.1 Ecuaţia căldurii: existenţă, unicitate şi regularitate

Notaţii. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă cu frontiera Γ. Notăm

$$Q = \Omega \times (0, +\infty)$$

$$\Sigma = \Gamma \times (0, +\infty);$$

Σ este numită frontiera **laterală** a cilindrului Q.

Fie următoarea problemă: să se găsească o funcţie $u(x,t) : \bar{\Omega} \times [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ astfel încât

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{în } Q,$$

$$(2) \qquad u = 0 \quad \text{pe } \Sigma,$$

$$(3) \qquad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{în } \Omega,$$

unde $\Delta = \sum_{i=1}^N \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ denotă **Laplacianul în variabila spaţială** x, t este **variabila de timp** şi $u_0(x)$ este o funcţie dată numită data **iniţială** (sau **Cauchy**).

Ecuaţia (1) este numită **ecuaţia căldurii** deoarece aceasta modelează distribuţia temperaturii u în domeniul Ω la momentul de timp t. Ecuaţia căldurii şi variantele ei apar în multe **fenomene** de difuzie ([1]) (vezi comentariile de la sfârşitul acestui capitol). Ecuaţia căldurii este cel mai simplu exemplu de **ecuaţie parabolică** ([2]).

Ecuaţia (2) este **condiţia la limită de tip Dirichlet**; aceasta ar putea fi înlocuită de condiţia Neumann

$$(2') \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{pe } \Sigma$$

(n este versorul normalei exterioare pe Γ) sau de oricare din condiţiile la limită întâlnite în capitolele VIII şi IX. Condiţia (2) corespunde presupunerii că frontiera Γ este ţinută la temperatura zero; condiţia (2′) corespunde presupunerii că fluxul căldurii de-a lungul lui Γ este zero.

Vom rezolva problema (1), (2), (3) privind $u(x,t)$ ca o **funcţie definită pe** $[0,+\infty)$ **cu valori într-un spaţiu** H**, unde** H **este un spaţiu de funcţii depinzând doar de** x: de exemplu $H = L^2(\Omega)$, sau $H = H_0^1(\Omega)$, etc. Cand vom scrie doar $u(t)$, vom înţelege că $u(t)$ este un element al lui H, şi anume funcţia $x \mapsto u(x,t)$. Acest punct de vedere ne permite să rezolvăm **foarte uşor** problema (1), (2), (3) combinând teorema lui Hille-Yosida cu rezultatele capitolelor VIII şi IX.

Pentru a simplifica lucrurile, vom presupune peste tot în capitolul X că Ω **este de clasă** C^∞ **cu frontiera** Γ **mărginită** (dar această presupunere ar putea fi considerabil slăbită dacă am fi interesaţi doar de soluţii "slabe").

• Teorema X.1. – Presupunem că $u_0 \in L^2(\Omega)$**. Atunci există o funcţie unică** $u(x,t)$ **satisfăcând (1), (2), (3) şi**

$$(4) \qquad u \in C([0,\infty);\ L^2(\Omega)) \cap C((0,\infty);\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

$$(5) \qquad u \in C^1((0,\infty);\ L^2(\Omega)).$$

In plus

$$u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times (\varepsilon,\infty)) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

[1]Propagarea căldurii este doar un exemplu printre multe altele.

[2]Cu privire la tradiţionala clasificare a EDP în trei categorii: "eliptice", "parabolice", "hiperbolice", vezi Courant-Hilbert [1].

In sfârşit, $u \in L^2(0,\infty;\ H_0^1(\Omega))$ **şi** ([3])

$$\frac{1}{2}|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)}\,dt = \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall T > 0. \tag{6}$$

Demonstraţie. – Vom aplica teoria Hille-Yosida în $H = L^2(\Omega)$ (dar sunt posibile alte alegeri, a se vedea demonstraţia teoremei X.2). Considerăm operatorul **nemărginit** $A:\ D(A) \subset H \to H$ definit de

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ Au = -\Delta u. \end{cases}$$

Este important să punctăm că **condiţia la limită (2) a fost inclusă în definiţia domeniului lui** A. Afirmăm că A este un **operator maximal monoton, autoadjunct**. Am putea atunci aplica teorema VI.7 pentru a deduce existenţa unei soluţii unice pentru (1), (2), (3) satisfăcând (4) şi (5).

i) A **este monoton**. Pentru fiecare $u \in D(A)$ avem

$$(Au,u)_{L^2} = \int_\Omega (-\Delta u)u = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0.$$

ii) A **este maximal monoton**. Trebuie să verificăm că $R(I+A) = H = L^2$. Dar deja se ştie (vezi teorema IX.25) că pentru fiecare $f \in L^2$ există o soluţie unică $u \in H^2 \cap H_0^1$ a ecuaţiei $u - \Delta u = f$.

iii) A **este autoadjunct**. Având în vedere propoziţia VII.6 este suficient să verificăm că A este simetric. Pentru fiecare $u,\ v \in D(A)$ avem

$$(Au,v)_{L^2} = \int (-\Delta u)v = \int \nabla u \cdot \nabla v$$

şi

$$(u,Av)_{L^2} = \int u(-\Delta v) = \int \nabla u \cdot \nabla v$$

[3] Aşa cum a fost explicat mai înainte notaţiile sunt următoarele:

$$|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x,T)|^2\,dx \quad \text{şi} \quad |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\right|^2 dx.$$

aşa încât $(Au, v) = (u, Av)$.

Apoi, din teorema IX.25 urmează că $D(A^\ell) \subset H^{2\ell}(\Omega)$, pentru fiecare întreg ℓ, cu injecţia continuă. Mai precis

$$D(A^\ell) = \{u \in H^{2\ell}(\Omega);\ u = \Delta u = ... \ = \Delta^{\ell-1}u = 0 \quad \text{pe } \Gamma\}.$$

Cunoaştem, din teorema VII.7, că soluţia u a problemei (1), (2), (3) satisface

$$u \in C^k((0,\infty);\ D(A^\ell)) \quad \forall k, \quad \forall \ell$$

şi de aceea

$$u \in C^k((0,\infty);\ H^{2\ell}(\Omega)) \quad \forall k, \quad \forall \ell.$$

Urmează (datorită corolarului IX.15) că

$$u \in C^k((0,\infty);\ C^k(\bar{\Omega})) \quad \forall k.$$

Ne întoarcem acum la demonstraţia lui (6). Vom multiplica formal ecuaţia (1) prin u şi apoi integra pe $\Omega\times(0,T)$. Totuşi trebuie să fim atenţi deoarece $u(t)$ este diferenţiabilă pe $(0,\infty)$ dar nu pe $[0,\infty)$. Considerăm funcţia $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)}$. Aceasta este de clasă C^1 pe $(0,\infty)$ (din (5)) şi, pentru $t > 0$,

$$\varphi'(t) = \left(u(t),\ \frac{du}{dt}(t)\right)_{L^2} = (u, \Delta u)_{L^2} = -\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

De aceea, pentru $0 < \varepsilon < T < \infty$, obţinem

$$\varphi(T) - \varphi(\varepsilon) = \int_\varepsilon^T \varphi'(t)\, dt = -\int_\varepsilon^T |\nabla u(t)|^2_{L^2}\, dt.$$

In final luăm $\varepsilon \to 0$. Din $\varphi(\varepsilon) \to \dfrac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)}$ deducem (6).

Dacă impunem ipoteze suplimentare asupra lui u_0 soluţia u devine mai netedă **în vecinătatea** lui $t = 0$ (reamintim că teorema X.1 garantează că soluţia u este netedă, adică $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times (\varepsilon,\infty)) \quad \forall \varepsilon > 0$).

Teorema X.2. – a) Dacă $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ atunci soluţia u a lui (1), (2), (3) satisface

$$u \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,\infty;\ H^2(\Omega))$$

şi

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,\infty;\; L^2(\Omega)).$$

In plus, avem

$$\int_0^T \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{2}|\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{7}$$

b) Dacă $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$**, atunci**

$$u \in C([0,\infty);\; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,\infty;\; H^3(\Omega))$$

şi

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,\infty;\; H^1(\Omega)).$$

c) Dacă $u_0 \in H^k(\Omega) \quad \forall k$ **şi satisface aşa-zisele condiţii de compatibilitate**

$$u_0 = \Delta u_0 = \ldots = \Delta^j u_0 = \ldots = 0 \qquad \textbf{pe } \Gamma \tag{8}$$

pentru orice întreg j**, atunci** $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,\infty))$.

Demonstraţie. – **a)**. Lucrăm în spaţiul $H_1 = H^1_0(\Omega)$ înzestrat cu produsul scalar

$$(u,v)_{H^1} = \int_\Omega \nabla u \;\cdot \nabla v + \int_\Omega uv.$$

In H_1 considerăm operatorul nemărginit $A_1 : D(A_1) \subset H_1 \to H_1$ definit de

$$\begin{cases} D(A_1) = \{u \in H^3(\Omega) \cap H^1_0(\Omega);\; \Delta u \in H^1_0(\Omega)\} \\ A_1 u = -\Delta u. \end{cases}$$

Afirmăm că A_1 este maximal monoton şi autoadjunct.

i) A_1 **este monoton**. Pentru fiecare $u \in D(A_1)$ avem

$$(A_1 u, u)_{H^1} = \int \nabla(-\Delta u)\cdot\nabla u + \int(-\Delta u)u = \int |\Delta u|^2 + \int |\nabla u|^2 \ge 0.$$

ii) A_1 **este maximal monoton**. Cunoaştem (din teorema IX.25) că pentru fiecare $f \in H^1(\Omega)$ soluţia $u \in H^1_0(\Omega)$ a problemei

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma \end{cases}$$

aparţine lui $H^3(\Omega)$. Dacă, în plus, $f \in H_0^1(\Omega)$ atunci (din ecuaţie) $\Delta u \in H_0^1(\Omega)$ şi deci $u \in D(A_1)$.

iii) A_1 **este simetric**. Pentru orice $u, v \in D(A_1)$ avem

$$\begin{aligned}(A_1 u, v)_{H_1} &= \int \nabla(-\Delta u)\cdot\nabla v + \int (-\Delta u) v \\ &= \int \Delta u\,\Delta v + \int \nabla u\cdot\nabla v = (u,\, A_1 v)_{H_1}.\end{aligned}$$

Aplicând teorema VII.7 vedem că dacă $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ atunci există o soluţie u a lui (1), (2), (3) (care coincide cu aceea obţinută în teorema X.1, datorită unicităţii) şi astfel încât

$$u \in C([0,\infty);\ H_0^1(\Omega)).$$

In final, definim $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}|\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)}$. Această funcţie este C^∞ pe $(0,\infty)$ şi

$$\varphi'(t) = \left(\nabla u(t),\, \nabla\frac{du}{dt}(t)\right)_{L^2} = \left(-\Delta u(t),\, \frac{du}{dt}(t)\right)_{L^2} = -\left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2_{L^2}.$$

Rezultă că, pentru $0 < \varepsilon < T < \infty$, avem

$$\varphi(T) - \varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^T \left|\frac{du}{dt}(t)\right|^2_{L^2} dt = 0$$

şi obţinem concluzia luând $\varepsilon \to 0$.

b). Fie spaţiul Hilbert $H_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ înzestrat cu produsul scalar

$$(u,v)_{H_2} = (\Delta u,\ \Delta v)_{L^2} + (u,v)_{L^2}\,.$$

In H_2 considerăm operatorul nemărginit $A_2 : D(A_2) \subset H_2 \to H_2$ definit de

$$\begin{cases} D(A_2) = \{u \in H^4(\Omega);\ u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{şi} \quad \Delta u \in H_0^1(\Omega)\}, \\ A_2 u = -\Delta u. \end{cases}$$

Este uşor de arătat că A_2 este un operator autoadjunct, maximal monoton în H_2 ([4]). Am putea atunci aplica teorema VII.7 lui A_2 în H_2. In

[4]Mai general dacă $A : D(A) \subset H \to H$ este un operator maximal monoton autoadjunct se poate considera spaţiul Hilbert $\tilde{H} = D(A)$ înzestrat cu produsul scalar $(u,v)_{\tilde{H}} = (Au, Av) + (u,v)$. Atunci operatorul $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset \tilde{H} \to \tilde{H}$ definit de $D(\tilde{A}) = D(A^2)$ şi $\tilde{A} = A$ este un operator maximal monoton autoadjunct în $\tilde{H}$.

final notăm $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}|\Delta u(t)|^2_{L^2}$. Această funcţie este C^∞ pe $(0,\infty)$ şi

$$\varphi'(t) = \left(\Delta u(t),\ \Delta \frac{du}{dt}(t)\right)_{L^2} = (\Delta u(t),\ \Delta^2 u(t))_{L^2} = -|\nabla \Delta u(t)|^2_{L^2}.$$

De aceea, pentru $0 < \varepsilon < T < \infty$, avem

$$\frac{1}{2}|\Delta u(T)|^2_{L^2} - \frac{1}{2}|\Delta u(\varepsilon)|^2_{L^2} + \int_\varepsilon^T |\nabla \Delta u(t)|^2_{L^2}\, dt = 0.$$

La limită, când $\varepsilon \to 0$, observăm că $u \in L^2(0,\infty;\ H^3(\Omega))$ şi (din (1)), $\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,\infty;\ H^1(\Omega))$.

c). In spaţiul $H = L^2(\Omega)$, considerăm operatorul $A:\ D(A) \subset H \to H$ definit de

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega), \\ Au = -\Delta u. \end{cases}$$

Aplicând teorema VII.5, cunoaştem că dacă $u_0 \in D(A^k)$, $k \geq 2$, atunci

$$u \in C^{k-j}([0,\infty);\ D(A^j)) \quad \forall j = 0, 1, \ldots, k.$$

Ipoteza (8) spune precis că $u_0 \in D(A^k)$ pentru fiecare întreg $k \geq 1$. De aceea avem

$$u \in C^{k-j}([0,\infty);\ D(A^j)) \quad \forall k \geq 1, \quad \forall j = 0, 1, \ldots, k.$$

Urmează (la fel ca în demonstraţia teoremei X.1) că $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,\infty))$.

• Remarca 1. – Teorema X.1 arată că ecuaţia căldurii are un **puternic efect regularizant asupra datei iniţiale** u_0. Observăm că soluţia $u(x,t)$ este C^∞ în x pentru orice $t > 0$ chiar dacă data iniţială este discontinuă. Acest efect implică, în particular, că ecuaţia căldurii este **ireversibilă**. In general nu se poate rezolva problema

(9) $$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{în } \Omega \times (0,T),$$

(10) $$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma \times (0,T)$$

cu o dată “finală”

$$u(x,T) = u_T(x) \quad \text{în } \Omega. \tag{11}$$

Ar trebui în mod necesar să presupunem că

$$u_T \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad \text{şi} \quad \Delta^j u_T = 0 \text{ pe } \Gamma \quad \forall j \geq 0.$$

Dar chiar şi aceste ipoteze nu sunt suficiente pentru a garanta existenţa unei soluţii retrograde a problemei (9), (10), (11). Această problemă nu trebuie confundată cu problema (9′), (10), (11) unde

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{în } \Omega \times (0,T), \tag{9′}$$

care are **întotdeauna** o soluţie unică pentru orice dată $u_T \in L^2(\Omega)$ (a se schimba t cu $T - t$ şi aplica teorema X.1).

REMARCA 2. – Rezultatele precedente sunt, de asemenea, adevărate – cu unele mici modificări – dacă înlocuim condiţia Dirichlet cu condiţia Neumann (vezi [EX]).

REMARCA 3. – Dacă Ω este **mărginit**, problema (1), (2), (3) poate fi, de asemenea, rezolvată prin **descompunerea lui** $L^2(\Omega)$ **într-o bază Hilbertiană**. In acest scop este foarte convenabil să alegem o bază $(e_i(x))_{i\geq 1}$ a lui $L^2(\Omega)$ compusă din **funcţii proprii** ale lui $-\Delta$ (cu condiţia Dirichlet omogenă), adică,

$$\begin{cases} -\Delta e_i = \lambda_i e_i & \text{în } \Omega \\ e_i = 0 & \text{pe } \Gamma \end{cases}$$

(a se vedea §IX.8). Vom căuta o soluţie u a lui (1), (2), (3) în forma unei serii ([5])

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) e_i(x). \tag{12}$$

[5]Din motive evidente această metodă este numită şi metoda “**separării variabilelor**” (sau metoda lui Fourier).

Observăm imediat că funcţiile reale $a_i(t)$ trebuie să satisfacă

$$a_i'(t) + \lambda_i a_i(t) = 0$$

aşa încât $a_i(t) = a_i(0)e^{-\lambda_i t}$. Constantele $a_i(0)$ sunt determinate de relaţia

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)e_i(x). \tag{13}$$

Cu alte cuvinte, soluţia u a lui (1), (2), (3) este dată de

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)e^{-\lambda_i t}e_i(x) \tag{14}$$

unde constantele $a_i(0)$ sunt componentele lui u_0 în baza (e_i), adică $a_i(0) = \int_\Omega u_0(x)e_i(x)\,dx$.

Pentru studiul convergenţei acestei serii (şi, de asemenea, regularităţii lui u obţinute în acest mod) facem trimitere la Raviart-Thomas [1] sau Weinberger [1]. Subliniem analogia dintre această metodă şi tehnica standard utilizată în rezolvarea **sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare**

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + M\vec{u} = 0$$

unde $\vec{u}(t)$ ia valori într-un spaţiu vectorial finit dimensional şi M este o matrice simetrică. Desigur, diferenţa principală provine din faptul că problema (1), (2), (3) este asociată unui **sistem infinit dimensional**.

Remarca 4. – **Relaţiile de compatibilitate** (8) arată, probabil, misterios dar de fapt ele sunt naturale. Acestea sunt **condiţii necesare** pentru a avea o soluţie u a lui (1), (2), (3) care să fie netedă în vecinătatea lui $t = 0$, adică, $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,\infty))$; (presupunerea $u_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ cu $u_0 = 0$ pe $\partial\Omega$ nu garantează netezimea până la $t = 0$). Intr-adevăr, să presupunem că $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,\infty))$ satisface (1), (2), (3). Atunci, este limpede că

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = \ldots = 0 \qquad \text{pe } \Gamma \times (0,\infty), \quad \forall j$$

şi, din continuitate, avem de asemenea

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0 \quad \text{pe } \Gamma \times [0,\infty), \quad \forall j. \tag{15}$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \Delta^2 u \quad \text{în } Q$$

şi, prin inducţie,

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = \Delta^j u \quad \text{în } Q \qquad \forall j.$$

Utilizând încă o dată continuitatea avem

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = \Delta^j u \quad \text{în } \bar{\Omega} \times [0, \infty). \tag{16}$$

Comparând (15) şi (16) pe $\Gamma \times \{0\}$ găsim (8).

Remarca 5. – Desigur că sunt multe variante ale rezultatelor de regularitate pentru u în apropierea lui $t = 0$ dacă facem presupuneri **intermediare** între ipotezele b) şi c) ale teoremei X.2.

X.2 Principiul de maxim

Rezultatul principal este următorul:

• **Teorema X.3. – Presupunem că $u_0 \in L^2(\Omega)$ şi fie u o soluţie a lui (1), (2), (3). Atunci, pentru toţi $(x, t) \in Q$, avem**

$$\text{Min}\,\{0, \text{Inf}_\Omega u_0\} \leq u(x, t) \leq \text{Max}\,\{0, \text{Sup}_\Omega u_0\}.$$

Demonstraţie. – Ca în cazul eliptic vom utiliza metoda troncaturilor a lui Stampacchia. Fie

$$K = \text{Max}\,\{0, \text{Sup}_\Omega u_0\}$$

şi presupunem $K < +\infty$. Fixăm o funcţie G la fel ca în demonstraţia teoremei IX.27 şi notăm

$$H(s) = \int_0^s G(\sigma)\, d\sigma, \; s \in \mathbf{R}.$$

Este uşor de verificat că funcţia φ definită prin

$$\varphi(t) = \int_\Omega H(u(x, t) - K)\, dx$$

are următoarele proprietăţi:

$$\varphi \in C([0,\infty);\ \mathbf{R}),\ \varphi(0) = 0;\ \varphi \geq 0 \quad \text{în } [0,\infty), \tag{17}$$

$$\varphi \in C^1((0,\infty);\ \mathbf{R}) \tag{18}$$

şi

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_\Omega G(u(x,t)-K)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx = \int_\Omega G(u(x,t)-K)\Delta u(x,t)\,dx \\ &= -\int_\Omega G'(u-K)|\nabla u|^2\,dx \leq 0 \end{aligned}$$

deoarece $G(u(x,t)-K) \in H_0^1(\Omega)$ pentru orice $t > 0$. Urmează că $\varphi' \leq 0$ în $(0,\infty)$ deci $\varphi \equiv 0$ şi, de aceea, pentru orice $t > 0$, $u(x,t) \leq K$ a.p.t. în Ω.

Corolarul X.4. – **Fie** $u_0 \in L^2(\Omega)$. **Soluţia** u **a lui (1), (2), (3) are următoarele proprietăţi:**

(i) Dacă $u_0 \geq 0$ **a.p.t. în** Ω **atunci** $u \geq 0$ **în** Q**,**

(ii) Dacă $u_0 \in L^\infty(\Omega)$**, atunci** $u \in L^\infty(Q)$ **şi**

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{19}$$

Corolarul X.5. – **Fie** $u_0 \in C(\bar{\Omega}) \cap L^2(\Omega)$ **cu** $u_0 = 0$ **pe** Γ **([6]). Atunci soluţia** u **a lui (1), (2), (3) aparţine lui** $C(\bar{Q})$.

Demonstraţia corolarului X.5. – Fie (u_{0n}) un şir de funcţii din $C_c^\infty(\Omega)$ astfel încât $u_{0n} \to u_0$ în $L^\infty(\Omega)$ şi în $L^2(\Omega)$ (existenţa unui astfel de şir este uşor de stabilit; a se vedea [EX]). Din teorema X.2 soluţia u_n a lui (1), (2), (3) corespunzând datei iniţiale u_{0n} aparţine lui $C^\infty(\bar{Q})$. Pe de altă parte (teorema VII.7), se ştie că

$$|u_n(t) - u(t)|_{L^2(\Omega)} \leq |u_{0n} - u_0|_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0.$$

Datorită lui (19) avem

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty(Q)} \leq \|u_{0n} - u_{0m}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

[6] Dacă Ω este nemărginit presupunem, de asemenea, că $u_0(x) \to 0$ când $|x| \to \infty$.

De aceea, şirul (u_n) converge la u uniform în $\bar{Q}$ şi deci $u \in C(\bar{Q})$.

La fel ca în cazul eliptic, există o altă abordare a principiului de maxim. Pentru a simplifica lucrurile, vom presupune că Ω este mărginit. Fie $u(x,t)$ o funcţie satisfăcând ([7]):

$$u \in C(\bar{\Omega} \times [0,T]) \qquad \text{cu } T > 0, \tag{20}$$

$$u \quad \text{este de clasă } C^1 \text{ în } t \text{ şi de clasă } C^2 \text{ în } x \quad \text{în } \Omega \times (0,T) \tag{21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0 \quad \text{în } \Omega \times (0,T). \tag{22}$$

Teorema X.6. – Presupunem satisfăcute condiţiile (20), (21) şi (22). Atunci

$$\text{Max}_{\bar{\Omega}\times[0,T]} u = \text{Max}_P u \tag{23}$$

unde $P = (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\Gamma \times [0,T])$ **este numită "frontiera parabolică" a cilindrului** $\Omega \times (0,T)$**.**

Demonstraţie. – Definim $v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon |x|^2$ cu $\varepsilon > 0$ aşa încât

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta v \leq -2\varepsilon N < 0 \quad \text{în } \Omega \times (0,T). \tag{24}$$

Afirmăm că

$$\text{Max}_{\bar{\Omega}\times[0,T]} v = \text{Max}_P v.$$

Presupunând contrariul, ar exista un punct $(x_0, t_0) \in \bar{\Omega} \times [0,T]$ astfel încât $(x_0,t_0) \notin P$ şi

$$\text{Max}_{\bar{\Omega}\times[0,T]} v = v(x_0,t_0).$$

Deoarece $x_0 \in \Omega$ şi $0 < t_0 \leq T$ avem

$$\Delta v(x_0,t_0) \leq 0 \tag{25}$$

şi

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0) \geq 0 \tag{26}$$

[7] Subliniem că nu prescriem nici o condiţie la limită sau dată iniţială.

(dacă $t_0 < T$ avem $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) = 0$ şi dacă $t_0 = T$ avem $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0$) ([8]). Combinând (25) şi (26) obţinem $\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v\right)(x_0, t_0) \geq 0$ – o contradicţie cu (24). De aceea avem

$$\mathrm{Max}_{\bar{\Omega}\times[0,T]} v = \mathrm{Max}_P v \leq \mathrm{Max}_P u + \varepsilon C$$

unde $C = \mathrm{Sup}_{x\in\Omega} |x|^2$. Deoarece $u \leq v$, concluzionăm că

$$\mathrm{Max}_{\bar{\Omega}\times[0,T]} u \leq \mathrm{Max}_P u + \varepsilon C \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Aceasta completează demonstraţia lui (23).

X.3 Ecuaţia undelor

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă cu frontiera Γ. Definim, ca mai înainte,

$$Q = \Omega \times (0, \infty) \quad \text{şi} \quad \Sigma = \Gamma \times (0, \infty).$$

Fie următoarea problemă: să se găsească o funcţie $u(x, t) : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ care să satisfacă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{în } Q, \tag{27}$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Sigma, \tag{28}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{în } \Omega, \tag{29}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad \text{în } \Omega, \tag{30}$$

unde $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ denotă **Laplacianul în raport cu variabila spaţială** x, t este variabila de timp şi u_0, v_0 sunt funcţii date.

Ecuaţia (27) este numită **ecuaţia undelor**. Operatorul $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)$ este uneori notat $\Box$ şi este numit **d'Alembertian**. Ecuaţia undelor este un exemplu tipic de **ecuaţie hiperbolică**.

[8] Pentru siguranţă ar trebui să lucrăm în $\Omega \times (0, T')$ cu $T' < T$ şi apoi să luăm $T' \to T$.

Dacă $N = 1$ şi $\Omega = (0, 1)$, ecuaţia (27) modelează micile ([9]) **vibraţii ale unei coarde** în absenţa oricărei forţe exterioare. Pentru orice $t \geq 0$, graficul funcţiei $x \in \Omega \mapsto u(x, t)$ reprezintă configuraţia coardei la momentul de timp t. Dacă $N = 2$ ecuaţia (27) modelează micile **vibraţii ale unei membrane elastice.** Pentru fiecare $t \geq 0$, graficul funcţiei $x \in \Omega \mapsto u(x, t)$ reprezintă configuraţia membranei la momentul de timp t. Mai general, ecuaţia (27) modelează **propagarea unei unde** (acustice, electromagnetice, etc.) într-un anumit mediu elastic omogen $\Omega \subset \mathbf{R}^N$.

Ecuaţia (28) este **condiţia la limită de tip Dirichlet**; ea poate fi înlocuită de condiţia Neumann sau de oricare din condiţiile la limită întâlnite în capitolul VIII sau IX. Condiţia $u = 0$ pe Σ are semnificaţia că coarda (sau membrana) este **fixată** pe Γ în timp ce condiţia Neumann spune că coarda este liberă la capete.

Ecuaţiile (29) şi (30) reprezintă **starea iniţială** a sistemului: **configuraţia iniţială** (se mai spune şi deplasarea iniţială) este descrisă de u_0 iar **viteza iniţială** este descrisă de v_0. Datele $(u_0,\ v_0)$ sunt uneori numite datele Cauchy.

Pentru a fixa ideile vom presupune pretutindeni în această secţiune că Ω este de clasă C^∞ cu frontiera Γ mărginită.

• **Teorema X.7 (Existenţă şi unicitate). – Presupunem $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ şi $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Atunci există o unică soluţie u a lui (27), (28), (29), (30) satisfăcând**

(31)
$$u \in C([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

In plus ([10])

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = |v_0|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u_0|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall t \geq 0. \tag{32}$$

[9]Ecuaţia completă este o ecuaţie **neliniară** foarte dificil de rezolvat; ecuaţia (27) este o versiune **liniarizată** a acesteia în apropierea poziţiei de echilibru.

[10]Precizăm notaţiile ca în secţiunile precedente, adică

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx, \quad |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x, t) \right|^2 dx.$$

REMARCA 6. – Ecuaţia (32) este o **lege de conservare** care afirmă că energia sistemului este **invariantă** în timp.

Inainte de a da demonstraţia teoremei X.7 vom menţiona un rezultat de regularitate.

Teorema X.8 (Regularitate). – Presupunem că datele iniţiale satisfac

$$u_0 \in H^k(\Omega),\ v_0 \in H^k(\Omega) \quad \forall k$$

şi relaţiile de compatibilitate

$$u_0 = \Delta u_0 = \ldots = \Delta^j u_0 = \ldots = 0 \qquad \textbf{pe } \Gamma \quad \forall j \geq 0 \textbf{ întreg}$$

$$v_0 = \Delta v_0 = \ldots = \Delta^j v_0 = \ldots = 0 \qquad \textbf{pe } \Gamma \quad \forall j \geq 0 \textbf{ întreg.}$$

Atunci soluţia u a lui (27), (28), (29), (30) aparţine lui $C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$.

DEMONSTRAŢIA TEOREMEI X.7. – La fel ca în §X.1 considerăm $u(x,t)$ ca o funcţie cu valori vectoriale definită pe $[0,\infty)$; mai precis, pentru fiecare $t \geq 0$, $u(t)$ notează aplicaţia $x \mapsto u(x,t)$. Scriem (27) în forma unui sistem de ecuaţii de ordinul întâi ([11]):

$$(33) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0 & \text{în } Q \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{în } Q \end{cases}$$

şi definim $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ aşa încât (33) devine

$$(34) \qquad \frac{dU}{dt} + AU = 0$$

unde

$$(35) \qquad AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}.$$

[11] Aceasta este o metodă standard care consistă în a scrie o ecuaţie diferenţială de ordinul k ca un sistem de k ecuaţii de ordinul întâi.

Aplicăm acum teoria Hille-Yosida în spaţiul $H = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ înzestrat cu produsul scalar

$$(U_1,\ U_2) = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \, dx + \int_\Omega u_1 u_2 \, dx + \int_\Omega v_1 v_2 \, dx$$

unde $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ şi $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Considerăm operatorul nemărginit $A: \ D(A) \subset H \to H$ definit de (35) cu

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

Subliniem că condiţia la limită (28) a fost inclusă în definiţia spaţiului H. Condiţia $v = \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ pe Σ este o consecinţă directă a lui (28).

Afirmăm că $A + I$ este maximal monoton în H:

i) $A + I$ **este monoton**; într-adevăr dacă $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ avem

$$\begin{aligned}
&(AU, U)_H + |U|_H^2 = \\
&= -\int \nabla v \cdot \nabla u - \int uv + \int (-\Delta u) v + \int u^2 + \int |\nabla u|^2 + \int v^2 \\
&= -\int uv + \int u^2 + \int v^2 + \int |\nabla u|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

ii) $A + I$ **este maximal monoton**. Aceasta se reduce la a demonstra că $A + 2I$ este surjectiv. Fiind dat $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$ trebuie să rezolvăm ecuaţia $AU + 2U = F$, adică sistemul

$$\begin{cases} -v + 2u = f & \text{în } \Omega \\ -\Delta u + 2v = g & \text{în } \Omega \end{cases} \tag{36}$$

cu

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{şi} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Din (36) urmează că

$$-\Delta u + 4u = 2f + g. \tag{37}$$

Ecuaţia (37) are o unică soluţie $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (din teorema IX.25). Apoi găsim $v \in H_0^1(\Omega)$ luând pur şi simplu $v = 2u - f$. Aceasta rezolvă (36).

Aplicând teorema lui Hille-Yosida (teorema VII.4) şi remarca VII.6 observăm că există o unică soluţie a problemei

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dU}{dt} + AU = 0 \quad \text{pe } [0,\infty), \\ U(0) = U_0. \end{array}\right. \tag{38}$$

cu

$$U \in C^1([0,\infty);\ H) \cap C([0,\infty);\ D(A)) \tag{39}$$

deoarece $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(A)$. Din (39) deducem (31).

Pentru a demonstra (32) este suficient a multiplica (27) cu $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ şi integra pe Ω. Subliniem că

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx$$

şi

$$\int_\Omega (-\Delta u)\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \int_\Omega \nabla u \frac{\partial}{\partial t}(\nabla u)\,dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

Remarca 7. – Când Ω este **mărginit** am putea utiliza pe $H_0^1(\Omega)$ produsul scalar $\int \nabla u_1 \cdot \nabla u_2$ (vezi corolarul IX.19) şi pe $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ produsul scalar

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + \int_\Omega v_1 v_2 \quad \text{unde } U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Cu acest produs scalar avem

$$(AU, U) = -\int \nabla v \cdot \nabla u + \int (-\Delta u) v = 0 \qquad \forall U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A).$$

Este uşor de verificat (vezi [EX]) că:

i) A şi $-A$ sunt maximal monotoni,

ii) $A^\star = -A$.

Ca o consecinţă putem rezolva problema

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} - AU = 0 \quad \text{pe } [0, +\infty), \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

sau echivalent ([12])

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = 0 \quad \text{pe } (-\infty, 0], \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Relaţia (32) poate fi scrisă

$$|U(t)|_H = |U_0|_H \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Se spune că familia $\{U(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$, este un **grup de izometrii pe** H.

• REMARCA 8. – Ecuaţia undelor **nu are nici un efect regularizant cu privire la datele iniţiale**, în contrast cu ecuaţia căldurii. Pentru a ne convinge de aceasta este suficient să considerăm cazul $\Omega = \mathbf{R}$. Astfel există o **soluţie explicită** foarte simplă a problemei (27), (28), (29), (30), şi anume

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)ds. \tag{40}$$

In particular, dacă $v_0 = 0$, avem

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)].$$

Este limpede că u **nu este mai netedă decât** u_0. Putem fi chiar mult mai precişi. Presupunem că $u_0 \in C^\infty(\mathbf{R}\backslash\{x_0\})$. Atunci $u(x,t)$ este C^∞ pe $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ exceptând dreptele $x + t = x_0$ şi $x - t = x_0$. Ele sunt numite **dreptele caracteristice** trecând prin punctul $(x_0, 0)$. Se spune că **singularităţile se propagă de-a lungul dreptelor caracteristice**.

[12] Cu alte cuvinte timpul este **reversibil**; din acest punct de vedere există o diferenţă fundamentală între ecuaţia undelor şi ecuaţia căldurii (pentru care timpul nu este reversibil).

Remarca 9. – Dacă Ω este mărginit problema (27), (28), (29), (30) poate fi rezolvată prin **descompunerea într-o bază Hilbertiană** – aşa cum s-a făcut pentru ecuaţia căldurii. Este foarte avantajos să lucrăm în baza (e_i) a lui $L^2(\Omega)$ compusă din **funcţiile proprii** ale lui $-\Delta$ (cu condiţia Dirichlet), adică $-\Delta e_i = \lambda_i e_i$ în Ω, $e_i = 0$ pe Γ; reamintim că $\lambda_i > 0$. Vom căuta o soluţie a lui (27), (28), (29), (30) sub forma

$$u(x,t) = \sum_i a_i(t) e_i(x). \tag{41}$$

Observăm imediat că funcţiile reale $a_i(t)$ trebuie să satisfacă

$$a_i''(t) + \lambda_i a_i(t) = 0,$$

astfel că

$$a_i(t) = a_i(0)\cos(\sqrt{\lambda_i} t) + \frac{a_i'(0)}{\sqrt{\lambda_i}} \sin(\sqrt{\lambda_i} t).$$

Constantele $a_i(0)$ şi $a_i'(0)$ sunt determinate de relaţiile

$$u_0(x) = \sum_i a_i(0) e_i(x) \quad \text{şi} \quad v_0(x) = \sum_i a_i'(0) e_i(x).$$

Cu alte cuvinte $a_i(0)$ şi $a_i'(0)$ sunt componentele lui u_0 şi v_0 în baza (e_i). Pentru studiul convergenţei seriei (41) vezi Raviart-Thomas [1] sau Weinberger [1].

Demonstraţia Teoremei X.8. – Vom utiliza aceleaşi notaţii ca în demonstraţia teoremei X.7. Este uşor de observat, prin inducţie după k, că

$$D(A^k) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} u \in H^{k+1}(\Omega) \text{ şi } \Delta^j u = 0 \text{ pe } \Gamma \ \forall 0 \le j \le \left[\frac{k}{2}\right] \\ v \in H^k(\Omega) \text{ şi } \Delta^j v = 0 \text{ pe } \Gamma \ \forall 0 \le j \le \left[\frac{k+1}{2}\right] - 1 \end{array} \right\}.$$

In particular, $D(A^k) \subset H^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega)$ cu injecţia continuă. Aplicând teorema VII.5 observăm că dacă $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(A^k)$, atunci soluţia U a lui (38) satisface

$$U \in C^{k-j}([0,\infty); D(A^j)) \quad \forall j = 0, 1, \dots k.$$

Astfel $u \in C^{k-j}([0,\infty);\ H^{j+1}(\Omega))\quad \forall j = 0,1,\dots,k$. Concluzionăm cu ajutorul corolarului IX.15 că sub presupunerile teoremei X.8 (adică $U_0 \in D(A^k)\ \ \forall k$) avem $u \in C^k(\bar\Omega \times [0,\infty))\ \ \forall k$.

REMARCA 10. – Relaţiile de compatibilitate introduse în teorema X.8 sunt **necesare şi suficiente** pentru a avea o soluţie $u \in C^\infty(\bar\Omega \times [0,\infty))$ a problemei (27), (28), (29), (30). Demonstraţia este aceeaşi ca în remarca 4.

REMARCA 11. – Tehnicile prezentate în §X.3 pot fi folosite, de asemenea, pentru rezolvarea **ecuaţiei Klein-Gordon**

$$(27') \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = 0 \text{ în } \Omega, \quad m > 0.$$

Punctăm că (27′) **nu poate fi redusă** la (27) printr-o schimbare de necunoscută cum ar fi $v(x,t) = e^{\lambda t}u(x,t)$.

X.4 Comentarii asupra capitolului X

Comentarii asupra ecuaţiei căldurii.

1) Teorema lui J.L. Lions.

Următorul rezultat ne permite să demonstrăm, într-un cadru foarte general, existenţa şi unicitatea unei soluţii **slabe** pentru problemele parabolice. **Această teoremă poate fi privită ca fiind corespondenta de tip parabolic a teoremei lui Lax-Milgram**. Fie H un spaţiu Hilbert cu produsul scalar $(\ ,\ )$ şi norma $|\ \ |$. Spaţiul dual H' este identificat cu H. Fie V un alt spaţiu Hilbert cu norma $\|\ \ \|$. Presupunem că $V \subset H$ cu injecţie continuă şi densă, astfel încât

$$V \subset H \subset V'$$

(vezi remarca V.1).

Fie $T > 0$ fixat; pentru a.p.t. $t \in [0,T]$ se consideră o formă biliniară $a(t;u,v) : V \times V \to \mathbf{R}$ care satisface următoarele proprietăţi:

i) Pentru orice $u, v \in V$ funcţia $t \mapsto a(t;u,v)$ este măsurabilă,

ii) $|a(t;u,v)| \le M\|u\|\|v\|$ pentru a.p.t. $t \in [0,T]$, $\forall u,v \in V$,

iii) $a(t;v,v) \ge \alpha\|v\|^2 - C|v|^2$ pentru a.p.t. $t \in [0,T]$, $\forall v \in V$, unde $\alpha > 0$, M şi C sunt constante.

Teorema X.9 (J.L. Lions). – **Fiind date** $f \in L^2(0,T;V')$ **şi** $u_0 \in H$ **există o funcţie unică** u **care satisface**

$$u \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H), \ \frac{du}{dt} \in L^2(0,T;V')$$

$$\langle \frac{du}{dt}(t), v\rangle + a(t;u(t),v) = \langle f(t), v\rangle \quad \textbf{pentru a.p.t. } t \in (0,T), \qquad \forall v \in V,$$

şi

$$u(0) = u_0.$$

Pentru demonstraţie vezi Lions-Magenes [1] sau [EX].

Aplicaţie: $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ şi

$$\begin{aligned} a(t;u,v) = \ & \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx + \sum_i \int_\Omega a_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx \\ & + \int_\Omega a_0(x,t) uv \, dx \end{aligned}$$

cu a_{ij}, a_i, $a_0 \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$ şi

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{pentru a.p.t. } (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ & \forall \xi \in \mathbf{R}^N, \ \alpha > 0. \end{aligned} \tag{42}$$

In acest mod obţinem o soluţie **slabă** a problemei

(43)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f & \text{în } Q \times (0,T), \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{în } \Omega. \end{cases}$$

Sub presupuneri suplimentare asupra datelor, soluţia lui (43) este mai netedă – a se vedea următoarele comentarii.

2) Regularitatea C^∞.

Presupunem aici că Ω este mărginit şi de clasă C^∞. Fie a_{ij}, a_i, $a_0 \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,T])$ satisfăcând (42).

Teorema X.10. – Presupunem că $u_0 \in L^2(\Omega)$ **şi** $f \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,T])$**. Atunci soluţia** u **a lui (43) aparţine lui** $C^\infty(\bar{\Omega} \times [\varepsilon, T])$ **pentru orice** $\varepsilon > 0$**.**

Dacă în plus $u_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ **şi** $\{f, u_0\}$ **satisfac relaţiile de compatibilitate corespunzătoare ([13]) pe** $\Gamma \times \{0\}$**, atunci** $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,T])$**.**

Pentru demonstraţie vezi Lions-Magenes [1], Friedman [1], [2], Ladyzhenskaya-Solonnikov-Uraltseva [1] şi [EX]; aceasta este bazată pe estimări foarte similare cu acelea prezentate în capitolele VII şi X.1.

Menţionăm că există şi o **teorie abstractă** care extinde pe cea a lui Hille-Yosida la probleme de forma $\dfrac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t)$ unde, pentru fiecare $t \in [0,T]$, $A(t)$ este un operator maximal monoton. Această teorie a fost dezvoltată de Kato, Tanabe, Sobolevski şi alţii. Din punct de vedere tehnic este mai complicat de manipulat decât teoria lui Hille-Yosida; vezi Friedman [2], Tanabe [1] şi Yosida [1].

3) Regularitatea L^p **şi** $C^{0,\alpha}$.

Considerăm problema ([14])

$$(44) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{în } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{în } \Omega. \end{cases}$$

Presupunem, pentru simplitate, Ω mărginit şi de clasă C^∞. Vom incepe cu rezultatul simplu.

Teorema X.11 (Regularitatea L^2**). – Fiind date** $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$ **şi** $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ **există o unică soluţie a lui (44) satisfăcând**

$$u \in C([0,T];\ H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

[13] Nu vom transcrie explicit aceste relaţii; acestea sunt extensii naturale ale lui (8) (a se vedea şi remarca 4).

[14] Desigur, am putea, de asemenea, prescrie o condiţie Dirichlet neomogenă $u(x,t) = g(x,t)$ pe $\Gamma \times (0,T)$ – dar pentru simplitate, vom trata doar cazul $g = 0$.

şi

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;\ L^2(\Omega)).$$

Demonstraţia este uşoară; a se vedea Lions-Magenes [1] sau [EX]. Mai general, în spaţiile L^p, avem

Teorema X.12 (Regularitatea L^p). – Fiind date $f \in L^p(\Omega \times (0,T))$ cu $1 < p < \infty$ şi $u_0 = 0$, ([15]) există o soluţie unică a lui (44) satisfăcând

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega \times (0,T)) \quad \forall i, j.$$

Teorema X.13 (Regularitatea Hölder). – Fie $0 < \alpha < 1$. Presupunem că $f \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0,T])$ ([16]) şi $u_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfac relaţiile naturale de compatibilitate:

$$u_0 = 0 \quad \textbf{pe } \Gamma \quad \textbf{şi} \quad -\Delta u_0 = f(x,0) \ \textbf{pe } \Gamma.$$

Atunci (44) are o soluţie unică u astfel încât

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0,T]) \quad \forall i, j.$$

Demonstraţiile teoremelor X.12 şi X.13 sunt delicate – exceptând cazul $p = 2$ al teoremei X.12. Ca în cazul eliptic (vezi comentariile de la sfârşitul capitolului IX) ele se bazează pe:

i) **O formulă explicită de reprezentare** pentru u implicând soluţia fundamentală a lui $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$. De exemplu dacă $\Omega = \mathbf{R}^N$ şi $f = 0$ atunci

$$u(x,t) = \int_{\mathbf{R}^N} E(x-y,\, t) u_0(y) dy = E * u_0 \tag{45}$$

unde $*$ se referă la convoluţia **numai** în variabila spaţială x şi $E(x,t) = (4\pi t)^{-N/2} e^{-|x|^2/4t}$; vezi Folland [1].

[15] Pentru a simplifica lucrurile.

[16] Adică $|f(x_1,t_1) - f(x_2,t_2)| \le C(|x_1 - x_2|^2 + |t_1 - t_2|)^{\alpha/2} \ \forall x_1, x_2, t_1, t_2$.

ii) **O tehnică a integralelor singulare**; a se vedea Ladyzhenskaya-Solonnikov-Uraltseva [1] şi Friedman [1]. Referitor la teorema X.12, vezi, de asemenea, Grisvard [1] (secţiunea 9) şi Stroock-Varadhan [1]. Brandt [2] (vezi şi Knerr [1]) are o **demonstraţie foarte simplă** a **regularităţii Hölder** în interiorul lui $\Omega \times (0, T)$ (concluzie parţială a teoremei X.13).

Cu ipoteze suplimentare asupra diferenţiabilităţii lui f se obţine o regularitate suplimentară a lui u. "Filozofia" generală de reţinut este următoarea: dacă u este soluţia lui (44) cu $u_0 = 0$ atunci totul se petrece ca şi când $\frac{\partial u}{\partial t}$ şi Δu **au aceeaşi regularitate** ca şi f.

In final, menţionăm că concluziile teoremelor X.11, X.12 şi X.13 rămân încă valabile dacă Δ este înlocuit de

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_i a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x,t)u$$

cu coeficienţi netezi astfel încât

$$\sum a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \quad \forall x, t, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N, \nu > 0. \tag{46}$$

In cazul **coeficienţilor nenetezi**, adică $a_{ij} \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ satisfăcând (46), un rezultat dificil al lui Nash-Moser afirmă că există un anume $\alpha > 0$ astfel încât $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])$; vezi Ladyzhenskaya-Solonnikov-Uraltseva [1].

4) Exemple de ecuaţii parabolice.

Ecuaţiile liniare şi neliniare de tip parabolic (şi sistemele) apar în multe domenii: mecanică, fizică, chimie, biologie, control optimal, probabilităţi, etc. Să menţionăm câteva exemple:

i) *Sistemul Navier-Stokes*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i + \displaystyle\sum_{j=1}^N u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} & \text{în } \Omega \times (0, T), 1 \leq i \leq N, \\ \text{div } u = \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 & \text{în } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{în } \Omega, \end{cases}$$

joacă un rol central în mecanica fluidelor, a se vedea Temam [1] şi referinţele citate.

ii) **Sistemele de reacţie-difuzie**. Acestea sunt ecuaţii neliniare parabolice sau sisteme de forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} - M\Delta(\vec{u}) = f(\vec{u}) \quad \text{în } \Omega \times (0,T) \\ +\text{Condiţii la limită şi date iniţiale,} \end{cases}$$

unde $\vec{u}(x,t)$ ia valori în $\mathbf{R}^m$, M este o matrice (diagonală) $m \times m$ şi f este o aplicaţie neliniară de la $\mathbf{R}^m$ în $\mathbf{R}^m$. Aceste sisteme sunt utilizate pentru a modela fenomene care apar în domenii variate: chimie, biologie, neurofiziologie, epidemiologie, combustie, genetica populaţiei etc.; vezi Fife [1] şi numeroasele sale referinţe.

iii) **Probleme de frontieră liberă**. De exemplu, **problema Stefan** descrie evoluţia unui amestec de gheaţă şi apă; vezi articolul detaliat al lui Magenes [1], Free Boundary Problems [1], [2], Moving Boundary Problems [1] (toate acestea cu multe referinţe).

iv) Ecuaţiile **de difuzie** joacă un rol central în **teoria probabilităţilor** (mişcarea browniană, procese Markov, procese de difuzie, ecuaţii diferenţiale stochastice, etc.); vezi Stroock-Varadhan [1].

v) Multe alte exemple de ecuaţii parabolice neliniare sunt prezentate în D. Henry [1], Bénilan-Crandall-Pazy [1], H. Brezis [2].

vi) O utilizare interesantă a ecuaţiei căldurii a fost făcută în conexiune cu teoria de index a lui Atiyah-Singer, a se vedea Gilkey [1].

5) Pentru rezultate suplimentare privind **principiul de maxim** pentru ecuaţiile parabolice, vezi Friedman [1], Protter-Weinberger [1], Sperb [1]. De pildă, dacă u este soluţia lui (1), (2), (3) cu $u_0 \geq 0$ şi u_0 nu este identic zero, atunci $u(x,t) > 0 \quad \forall x \in \Omega$, $\forall t > 0$. Când $\Omega = \mathbf{R}^N$ aceasta rezultă uşor din formula de reprezentare explicită (45).

Comentarii asupra ecuaţiei undelor

6) Soluţii slabe ale ecuaţiei undelor.

Există un cadru general abstract pentru existenţa şi unicitatea unei soluţii slabe a ecuaţiei undelor (cu membrul drept f). Fie V şi H două spaţii Hilbert astfel încât $V \subset H \subset V'$ (ca în comentariul 1). Fie $T > 0$. Pentru fiecare $t \in [0,T]$ este dată o formă biliniară continuă şi simetrică $a(t;\, u,v) : V \times V \to \mathbf{R}$ astfel încât

i) funcţia $t \mapsto a(t; u, v)$ este de clasă C^1, $\forall u, v \in V$
ii) $a(t;\ v, v) \geq \alpha\|v\|^2 - C|v|^2 \ \ \forall t \in [0, T], \quad \forall v \in V,\ \alpha > 0.$

Teorema X.14 (J.L. Lions). – **Fiind date** $f \in L^2(0, T;\ H)$**,** $u_0 \in V$ **şi** $v_0 \in H$ **există o funcţie unică** u **satisfăcând**

$$u \in C([0, T]; V), \quad \frac{du}{dt} \in C([0, T]; H), \quad \frac{d^2u}{dt^2} \in L^2(0, T; V'),$$

$$\langle \frac{d^2u}{dt^2}(t), v\rangle + a(t; u(t), v) = \langle f(t), v\rangle \quad \textbf{pentru a.p.t. } t \in (0, T), \quad \forall v \in V,$$

$$u(0) = u_0 \quad \textbf{şi} \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0.$$

Pentru demonstraţie vezi Lions-Magenes [1].
Aplicaţie. – Fie $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$,

$$a(t;\ u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx + \int_\Omega a_0(x, t)\, uv\, dx$$

cu (42) indeplinită şi

$$a_{ij}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, a_0, \frac{\partial a_0}{\partial t} \in L^\infty(\Omega \times (0, T)),\ a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j.$$

Se obţine astfel o soluţie slabă unică a problemei

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \displaystyle\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0 u = f & \text{în } \Omega \times (0, T) \\ (28),\ (29),\ (30). & \end{cases}$$

Subliniem că **ipotezele asupra datelor iniţiale** ($u_0 \in H_0^1(\Omega)$ şi $v_0 \in L^2(\Omega)$) **sunt aici mai slabe decât acelea impuse în teorema X.7**. Sub ipoteze suplimentare asupra lui f, u_0 şi v_0 (condiţii de regularitate **şi** compatibilitate) precum şi asupra lui a_{ij}, a_0 se obţine că u este mai netedă (vezi Lions-Magenes [1]).

7) Teoria L^p pentru ecuaţia undelor este delicată şi încă puţin cunoscută.

8) **Principiul de maxim**.

Unele forme **foarte speciale** ale principiului de maxim rămân valabile pentru ecuaţia undelor; a se vedea, Protter-Weinberger [1]. De exemplu, fie u o soluţie a lui (27), (28), (29), (30).

(i) Dacă $\Omega = \mathbf{R}$, $u_0 \geq 0$ şi $v_0 \geq 0$, atunci $u \geq 0$.

(ii) Dacă $\Omega = \mathbf{R}^2$, $u_0 = 0$ şi $v_0 \geq 0$, atunci $u \geq 0$.

Afirmaţia (i) urmează din formula de reprezentare (40). O formulă similară, dar mult mai complicată este valabilă în $\mathbf{R}^N$; a se vedea Mizohata [1], Folland [1], Weinberger [1], Courant-Hilbert [1], Mikhlin [1] şi [EX]. Aceasta implică (ii).

Totuşi cititorul **este avertizat** asupra următoarelor (vezi [EX]):

(iii) Dacă $\Omega = (0, 1)$, $u_0 \geq 0$ şi $v_0 = 0$, atunci în general **nu** se poate spune că $u \geq 0$.

(iv) Dacă $\Omega = \mathbf{R}^2$, $u_0 \geq 0$ şi $v_0 = 0$, atunci în general **nu** se poate spune că $u \geq 0$.

9) **Domeniul de dependenţă. Propagarea undelor. Principiul lui Huygens**.

Există o diferenţă **esenţială** între ecuaţia căldurii şi ecuaţia undelor:

a) Pentru **ecuaţia căldurii, o mică perturbaţie a datei iniţiale este imediat resimţită peste tot**, adică $\forall x \in \Omega$, $\forall t > 0$. De exemplu, am văzut că dacă $u_0 \geq 0$ şi $u_0 \not\equiv 0$, atunci $u(x, t) > 0$ $\forall x \in \Omega$, $\forall t > 0$. Altfel spus, **căldura se propagă cu viteză infinită** ([17]).

b) Pentru ecuaţia undelor, situaţia este **cu totul diferită**. Să presupunem, de pildă, $\Omega = \mathbf{R}$. Formula explicită (40) arată că $u(\bar{x}, \bar{t})$ depinde **doar** de valorile lui u_0 şi v_0 în intervalul $[\bar{x} - \bar{t}, \bar{x} + \bar{t}]$

Se spune că intervalul $[\bar{x} - \bar{t},\ \bar{x} + \bar{t}]$ de pe axa lui x este **domeniul de dependenţă** al punctului $(\bar{x}, \bar{t})$. Acelaşi lucru este valabil pentru $\Omega = \mathbf{R}^N$ $(N \geq 2)$: $u(\bar{x}, \bar{t})$ depinde doar de valorile lui u_0 şi v_0 în **bila** $\{x \in \mathbf{R}^N;\ |x - \bar{x}| \leq \bar{t}\}$. Această bilă din hiperplanul $\mathbf{R}^N \times \{0\}$ este numită **domeniul de dependenţă** al punctului $(\bar{x}, \bar{t})$. Din punct de

[17] Din punct de vedere fizic, acest lucru nu este realist! Totuşi formula de reprezentare (45) arată că o perturbaţie a datei iniţiale localizată în apropierea lui $x = x_0$ are **efecte neglijabile** în punctul (x, t) dacă t este mic şi $|x - x_0|$ este mare.

vedere geometric, aceasta este intersecţia conului

$$\{(x,t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R};\ |x-\bar{x}| \le \bar{t}-t \text{ şi } t \le \bar{t}\}$$

cu hiperplanul $\mathbf{R}^N \times \{0\}$. Interpretarea fizică este că undele se propagă cu o viteză cel mult egală cu 1 ([18]). Un semnal localizat în domeniul D la momentul de timp $t = 0$ ([19]) este resimţit în punctul $x \in \mathbf{R}^N$ **doar după timpul** $t \ge \text{dist}\,(x, D)$ $(u(x,t) = 0$ pentru $t < \text{dist}\,(x, D))$.

Dacă $N > 1$ este **impar**, de exemplu $N = 3$, există un efect chiar mai izbitor: $u(\bar{x}, \bar{t})$ depinde doar de valorile pe care le ia u_0 şi v_0 ([20]) pe **sfera** $\{x \in \mathbf{R}^N; |x-\bar{x}| = t\}$. Acesta este **Principiul lui Huygens**. Din punct de vedere fizic, acesta spune că un semnal localizat în domeniul D la momentul de timp $t = 0$ este observat în punctul $x \in \mathbf{R}^N$ doar pe durata de timp $[t_1, t_2]$ cu $t_1 = \text{Inf}_{y\in D} d(x,y)$ şi $t_2 = \text{Sup}_{y\in D} d(x,y)$. După momentul de timp t_2 semnalul nu mai este resimţit în punctul x.

Pe de altă parte, dacă dimensiunea N este **pară** (de exemplu $N = 2$) semnalul persistă în x la orice moment de timp $t > t_1$ ([21]).

O aplicaţie în muzică. Un ascultător care se află în $\mathbf{R}^3$ la o distanţă d de un instrument muzical ([22]) aude la momentul de timp t nota cântată la momentul de timp $(t - d)$ şi nimic altceva! ([23])

Pentru mai multe detalii asupra **Principiului lui Huygens** cititorul poate consulta Courant-Hilbert [1], Folland [1], Garabedian [1], Mikhlin [1].

[18] Viteza 1 intră deoarece am normalizat ecuaţia undelor. Unii cititori ar putea prefera să lucreze cu ecuaţia $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$, pentru a oferi vitezei c un rol privilegiat.

[19] Adică, u_0 şi v_0 au suporturile în D.

[20] Şi unele dintre derivatele lor.

[21] Efectul este amortizat cu timpul dar nu dispare complet.

[22] De dimensiune neglijabilă.

[23] În timp ce în $\mathbf{R}^2$ ar trebui sa audă o combinaţie ponderată a tuturor notelor cântate în intervalul de timp $[0, t - d]$.

BIBLIOGRAFIE

ADAMS R.: [1], *Sobolev spaces*, Acad. Press, (1975).

AGMON S.: [1], *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand (1965).

AGMON S., DOUGLIS A., NIRENBERG L.: [1], Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 12 (1959), 623–727.

AKHIEZER N., GLAZMAN I.: [1], *Theory of linear operators in Hilbert space*, Pitman (1980).

AUBIN J. P.: [1],*Mathematical methods of game and economic theory*, North Holland (1979).

AUBIN TH.: [1], Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 280 (1975), 279–281 şi *J. Diff. Geom.*, 11 (1976), 573–598.

BAIOCCHI C., CAPELO A.: [1], *Disequazioni variazionali e quasi-variazionali, Applicazioni a problemi di frontiera libera*, Pitagora Editrice, Bologna (1978). Traducere engleză: Wiley, (1984).

BALAKRISHNAN A.: [1], *Applied Functional Analysis*, Springer (1976).

BAOENDI M. S., GOULAOUIC C.: [1], Régularitè et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénerés, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 34 (1969), 361–379.

BARBU V.: [1], *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff (1976).

BARBU V., PRECUPANU T.: [1],*Convexity and optimization in Banach spaces*, Noordhoff (1978).

BEAUZAMY B.: [1], *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North-Holland (1983).

BENILAN PH., CRANDALL M., PAZY A.: [1], Non-linear evolution equations governed by accretive operator (sub tipar).

BENSOUSSAN A., LIONS J. L.: [1], *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique*, Dunod (1978).

BERGER M.: [1], Geometry of the spectrum, in *Differential Geometry*, Chern-Osserman *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. 27, Part 2; Amer. Math. Soc., 1975, 129–152.

BERGER, M.: [1], *Nonlinearity and Functional Analysis*, Acad. Press (1977).

BERGH J., LÖFSTRÓM J.: [1], *Interpolation spaces: an introduction*, Springer (1976).

BERS L., JOHN F., SCHECHTER M.: [1], *Partial differential equations*, (ediţia a doua), Amer. Math. Soc. (1979).

BOMBIERI E.: [1], Variational problems and elliptic equations, in *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, F. Browder ed., *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. 28, Part 2; Amer. Math. Soc. (1977), p. 525–536.

BOURBAKI N.: [1], *Espaces vectoriels topologiques*, (2 volume), Hermann (1967).

BRANDT A.: [1], Interior estimates for second order elliptic differential (or finite-difference) equations via the maximum principle, *Israel J. Math.*, 76 (1969), 95–121.

[2] Interior Schauder estimates for parabolic differential (or difference) equations, *Israel J. Math.*, 7 (1969), 254–262.

BREZIS H.: [1], *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North Holland (1973).

[2] *Cours de 3^e cycle sur les équations d'évolution non linéaires.* Redactare detaliată sub tipar.

BREZIS H., CORON J. M., NIRENBERG L.: [1], Free vibrations for a nonlinear wave equation and a Theorem of P. Rabinowitz, *Comm. Pure Appl. Math.*, 33 (1980), 667–689.

BROWDER F.: [1], *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution, Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. 18, Part 2; Amer. Math. Soc. (1976).

CHAE S. B.: [1], *Lebesque Integration*, Dekker (1980).

Choquet G.: [1], *Cours d'Analyse. Topologie*, Masson (1964).

[2] *Lectures on Analysis* (3 volume), Benjamin (1969).

Choquet-Bruhat Y., Dewitt-Morette C., Dillard-Bleick M.: [1], *Analysis, manifolds and physics*, North Holland (1977).

Ciarlet Ph.: [1], *The finite element method for elliptic problems*, North Holland (1979).

Clarke F., Ekeland I.: [1], Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period, *Comm. Pure Appl. Math.*, 33 (1980), 103–116.

Coddington E., Levinson N.: [1], *Theory of ordinary differential equations*, McGraw Hill (1955).

Courant R., Hilbert D.: [1], *Methods of mathematical physics* (2 volume), Interscience (1962).

Damlamian A.: [1], Application de la dualité non convexe à une problème non linéaire à frontière libre (équilibre d'un plasma confiné) *C. R. Acad. Sc. Paris*, 286 (1978), 153–155.

Davies E.: [1], *One parameter semigroups*, Acad. Press (1980).

Dellacherie C., Meyer P.-A.: [1], *Probabilitiés et potentiel*, Hermann, Paris (1983).

Devito C.: [1], *Functional Analysis*, Acad. Press (1978). 1978

Diestel J.: [1] *Geometry of Banach: selected topics*, Springer (1975).

[2] *Sequences and series in Banach spaces*, Springer (1984).

Dieudonné J.: [1], *Fondements de l'Analyse moderne*, Gauthier Villars (1963).

[2] *Eléments d'analyse*, Tome II, Gauthier Villars (1968).

[3] *History of Functional Analysis*, North Holland (1981).

Dixmier J.: [1], *Topologie générale*, PUF (1980).

Dubreil P., Jacotin M. L.: [1], *Leçons d'Algèbre moderne*, Dunod (1961).

Dunford N., Schwartz J. T.: [1], *Linear operators*, (3 volume), Interscience (1972).

Duvaut G., Lions J. L.: [1], *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod (1972).

Edwards R.: [1], *Functional Analysis*, Holt-Rinehart-Winston (1965).

Ekeland I., Temam R.: [1], *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod-Gauthier Villars, Paris (1974).

ENFLO P.: [1], A counterexample to the approximation property in Banach spaces, *Acta Math.*, 130 (1973), 309–317.

FIFE P.: [1], *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*, Lecture Notes in Biomathematics, 28, Springer (1979).

DEFIGUEIREDO D. G., KARLOVITZ L.: [1], On the radial projection in normed spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 364–368.

FOLLAND G.: [1], *Introduction to partial differential equations*, Princeton Univ. Press (1976).

FREE BOUNDARY PROBLEMS: [1] Proc. Sem. held in Pavia (1979), lst. Naz. Alta Mat. Roma; [2] Proc. Sem. held in Montecatini (1981), Pitman (sub tipar).

FRIEDMAN A.: [1], *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall (1964).

[2] *Partial differential equations*, Holt-Rinehart-Winston (1969).

[3] *Foundations of modern Analysis*, Holt-Rinehart-Winston (1970).

GARABEDIAN P.: [1] *Partial differential equations*, Wiley (1964).

GERMAIN P.: [1], *Cours de Mécanique*, École Polytechnique (1982).

GILBARG D., TRUDINGER N.: [1], *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer (1977).

GILKEY P.: [1], *The index Theorem and the heat equation*, Publish or Perish (1974).

GIUSTI E.: [1], *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Lecture Notes Australian Nat. Univ. Canberra (1977).

GOLDSTEIN J.: [1], *Semigroups of operators and applications*, Encycl. of Math. and its Applic., G.C. Rota, ed. Addison-Wesley (sub tipar).

GOULAOIC C.: [1], *Calcul différential et analyse Fonctionnelle*, Cours de l'École Polytechnique (1981).

GRISVARD P.: [1], *Équations différentielles abstraites*, Ann. Sc. ENS, 2 (1969), 311–395.

GUICHARDET A.: [1], *Calcul Intégral*, Armand Colin (1969).

GURTIN M.: [1], *An Introduction to Continuum Mechanics*, Acad. Press, 1981.

HARTMAN PH.: [1], *Ordinary differential equations*, Wiley (1964).

HENRY D.: [1], *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer (1981).

Hewitt E., Stromberg K.: [1], *Real and abstract analysis*, Springer (1965).

Holmes R.: [1], *Geometric Functional Analysis and its applications*, Springer (1975).

Hörmander L.: [1], *Linear partial differential operators*, Springer (1963).

Horvath J.: [1], *Topological vector spaces and distributions*, Addison-Wesley (1966).

Huet D.: [1], *Décomposition spectrale et opèrateurs*, PUF (1976).

James R. C.: [1], A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, *Proc. Nat. Acad. Sc. USA*, 37 (1951), 174–177.

Kac M.: [1], Can one hear the shape of a drum?, *Amer. Math. Monthly*, 73 (1966), 1–23.

Kakutani S.: [1], Some characterizations of Euclidean spaces, *Jap. J. Math.*, 16 (1939), 93–97.

Karlin S.: [1], *Mathematical methods and theory in games, programming, and economics*, (2 volume), Addison-Wesley (1959).

Kato T.: [1], *Perturbation theory for linear operators*, Springer (1976).

Katznelson Y.: [1], *An introduction to harmonic analysis*, Dover Publications (1976).

Kelley J., Namioka I.: [1], *Linear topological spaces*, Springer (1976).

Kinderlehrer D., Stampacchia G.: [1], *An introduction to variational inequalities and their applications*, Acad. Press (1980).

Knerr B.: [1], Parabolic interior Schauder estimates by the maximum principle, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 75 (1980), 51–58.

Kohn J. J., Nirenberg L.: [1], Degenerate elliptic parabolic equations of second order, *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 (1967), 797–872.

Kolmogorov A., Fomin S.: [1], *Introductory real Analysis*, Prentice-Hall (1970).

Köthe: [1], *Topological vector spaces*, (2 volume), Springer 1969, 1979.

Krasnoselskii M.: [1], *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, McMillan (1964).

KREYSZIG E.: [1], *Introductory Functional Analysis with applications*, Wiley (1978).

LADYZHENSKAYA O., URALTSEVA N.: [1], *Linear and quasilinear elliptic equations*, Acad. Press (1968).

LADYZHENSKAYA O., SOLONNIKOV V., URALTSEVA N.: [1], *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Amer. Math. Soc. (1968).

LANG S.: [1], *Analyse réelle*, Inter Éditions, Paris (1977).

LARSEN R.: [1], *Functional Analysis: an introduction*, Dekker (1973).

LIEB E.: [1], Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities, *Ann. Math.*, 118 (1983), 349–374.

LINDENSTRAUSS J., PAZY A., WEISS B.: [1], *Introduction to Functional Analysis*, Cours de l'Université de Jérusalem (1980).

LINDENSTRAUSS J., TZAFRIRI L.: [1], On the complemented subspaces problem, *Israel J. Math.*, 9 (1971), 263–269.

[2], *Classical Banach spaces*, (2 volume), Springer, 1973, 1979.

LIONS J. L.: [1], *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Presses de l'Univ. de Montreal (1965).

[2], *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod (1968).

[3], *Quelques méthods de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier Villars (1969).

LIONS J. L., MAGENES E.: [1], *Problèmes aux limites non homogènes*, (3 volume), Dunod (1968).

MAGENES E.: [1], Topics in parabolic equations: some typical free boundary problems, in *Boundary value problems for linear evolution partial differential equations*, (Garnir, ed.), Reidel (1977).

MALLIAVIN P.: [1], *Intégration et Probabilités, Analyse de Fourier et Analyse spectrale*, Masson (1982).

MARLE C. M.: [1], *Mesures et probabilités*, Hermann (1974).

MARTIN R. H.: [1], *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, Wiley (1976).

MIKHLIN S.: [1], *An advanced course of mathematical physics*, North Holland (1970).

MIRANDA C.: [1], *Partial differential equations of elliptic type*, Springer (1970).

Mizohata S.: [1], *The theory of partial differential equations*, Cambridge Univ. Press (1973).

Morawetz C.: [1], L^p inequalities, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 1299–1302.

Moreau J. J.: [1], *Fonctionnelles convexes*, Séminaire Leray, Collège de France (1966).

[2] Applications of convex analysis to the treatment of elastoplastic systems, in *Applications of methods of Functional Analysis to problems in Mechanics*, Symp. IUTAM/IMU, (Germain-Nayrolles, eds.) Springer (1976).

Morrey C.: [1], *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer (1966).

Moulin H., Fogelman F.: [1], *La convexité dans les mathématiques de la décision*, Hermann (1979).

Moving Boundary Problems, Proc. Symp. held at Gatlinburg (Wilson, Solomon, Boggs, eds.) Acad. Press (1978).

Nečas, J.: [1], *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson (1967).

Nečas J., Hlavaček L.: [1], *Mathematical theory of elastic and elastoplastic bodies. An introduction*, Elsevier (1981).

Neveu J.: [1], *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson (1964).

Nirenberg L.: [1], On elliptic partial differential equations, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 13 (1959), 116–162.

[2] *Topics in nonlinear Functional Analysis*, New York Univ. Lecture Notes (1974).

[3] Variational and topological methods in ninlinear problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 4 (1981), 267–302.

Oleinik O., Radkevitch E.: [1], *Second order equations with nonnegative characteristic form*, Plenum (1973).

Osserman R.: [1], Isoperimetric inequalities and eigenvalues of the Laplacian, in *Proc. Int. Congress of Math. Helsinski* (1978) şi *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84 (1978), 1182–1238.

Pazy A.: [1], *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Lecture Notes Univ. of Maryland (1974).

Phelps R.: [1], *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand (1966).

ProtterM., Weinberger H.: [1], *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall (1967).

Rabinowitz P.: [1], Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, in *Eigenvalues of Nonlinear Problems*, CIME Cremonese (1974).

Raviart P. A., Thomas J. M.: [1], *Introduction à l'Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson (1983).

Rockafellar R. T.: [1], *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press (1970).

Reed M., Simon B.: [1], *Methods of modern mathematical physics*, (4 volume), Acad. Press, 1972, 1979.

Rudin W.: [1] *Functional Analysis*, McGraw Hill (1973).

[2] *Real and complex Analysis*, McGraw Hill (1974).

Schaefer H.: [1], *Topological vector spaces*, Springer (1971).

Schechter M.: [1], *Principles of Functional Analysis*, Acad. Press (1971).

[2] *Operator methods in Quantum mechanics*, North Holland (1981).

Schwartz J. T.: [1], *Nonlinear Functional Analysis*, Gordon Breach (1969).

Schwartz L.: [1], *Théorie des distributions*, Hermann (1973).

[2] *Topologie générale et Analyse Fonctionnelle*, Hermann (1970).

[3] *Analyse Hilbertienne*, Hermann (1979).

[4] Geometry and Probability in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 4 (1981), 135–141 şi Lecture Notes, No. 852, Springer (1981).

[5] Fonctions mesurables et $*$-scalairement mesurables, propriété de Radon-Nikodym, Exposés 4.5 et 6, Séminaire Maurey-Schwartz, École Polytehcnique (1974-1975).

Serrin J.: [1], The solvability of boundary value problems in *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, F. Browder ed., Proc. Symp. Pure Math., vol. 28, Part 2, Amer. Math. Soc. 1977, 507–525.

Singer I.: [1], *Bases in Banach spaces*, I,II, Springer (1970).

Singer I. M.: [1], Eigenvalues of the Laplacian and invariants of manifolds, in *Proc. Int. Congress of Math. Vancouver* (1974).

Sperb R.: [1], *Maximum principles and their applications*, Acad.

Press (1981).

STAMPACCHIA G.: [1], *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Presses Univ. Montreal (1966).

STEIN E.: [1], *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press (1970).

STEIN E., WEISS G.: [1], *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Univ. Press (1971).

STOER J., WITZGALL C.: [1], *Convexity and optimization in finite dimensions*, Springer (1970).

STROOCK D., VARADHAN S.: [1], *Multidimensional diffusion processes*, Springer (1979).

TALENTI G., Best constants in Sobolev inequality, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 110 (1976), 353–372.

TANABE H.: [1], *Equations of evolution*, Pitman (1979).

TAYLOR A., LAY D.: [1], *Introduction to Functional Analysis*, Wiley (1980).

TEMAM R.: [1], *Navier-Stokes equations*, North-Holland (1979).

TEMAM R., STRANG G.: [1], Duality and relaxation in the variational problems of plasticity, *J. de Mécanique*, 19 (1980), 493–528.

[2] Functions of bounded deformation, *Archive Rat. Mech. Anal.*, 75 (1980), 7–21.

TREVES F.: [1], *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Acad. Press (1967).

[2] *Linear partial differential equations with constant coefficients*, Gordon Breach (1967).

[3] *Locally convex spaces and linear partial differential equations*, Springer (1967).

[4] *Basic linear partial differential equations*, Acad. Press (1975).

VOLPERT A. I.: [1], The spaces BV and quasilinear equations, *Mat. Sbornik USSR*, 2 (1967), 225–267.

WEINBERGER H.: [1], *A first course in partial differential equations*, Blaisdell (1965).

[2] *Variational methods for eigenvalue approximation*, Reg. Conf. Appl. Math. SIAM (1974).

WHEEDEN R., ZYGMUND A.: [1], *Measure and Integral*, Dekker

(1977).
YAU S. T.: [1], The role of partial differential equations in differential geometry, in *Proc. Int. Congress of Math.*, Helsinki (1978).
YOSIDA K.: [1], *Functional Analysis*, Springer (1965).