Elem. Math. 61 (2006) 173 – 178
0013-6018/06/040173-6

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2007 erbeten. Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH–5415 Nussbaumen

gesandt werden. In einem gängigen Format abgefasste Lösungen können auch als Attachment über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1236: Welches ist das kleinste $n \geq 3$, für welches es n aufeinanderfolgende Quadratzahlen gibt, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist?

Peter Hohler, Aarburg, CH

Aufgabe 1237: Spieler $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ziehen nach folgender Regel abwechselnd Karten aus n beliebig grossen Kartenstöcken: Der Spieler, der am Zug ist, wählt einen Stock aus und entnimmt ihm eine oder alle Karten; wer die letzte Karte zieht, hat verloren.

Für welche Ausgangssituationen hat $\mathcal{B}$ eine Gewinnstrategie, falls $\mathcal{A}$ zuerst zieht?

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1238 (Die einfache dritte Aufgabe): Man zeige, dass die Determinante der Vandermonde-Matrix Ω der n-ten Einheitswurzeln reell oder rein imaginär ist:

$$\Omega = (w_{k\ell})\,, \qquad k, \ell = 1, 2, \ldots, n, \qquad \text{wobei } w_{k\ell} = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{(k-1)(\ell-1)}$$

Peter Nüesch, Lausanne, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2005

Aufgabe 1224. Ist f die Identität, so besitzt die Differentialgleichung

$$y'' + f \circ y = 0 \tag{1}$$

bekanntlich keine Lösung, welche im Intervall $[0, \infty)$ nur positive Werte annimmt. Man zeige, dass für jede für $x > 0$ stetige positive Funktion f mit $\liminf_{x\to\infty} f(x) > 0$ keine Lösung von (1) auf $[0, \infty)$ nur positive Werte annimmt.

Vicenţiu Rădulescu, Craiova, RO

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind fünf Zuschriften eingetroffen, nämlich von Alexander Bofinger (Timişoara, RO [zwei Lösungen]), Peter Bundschuh (Köln, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A) und Gerhard Wanner (Genève, CH).

Wir folgen *Peter Bundschuh*: Wir betrachten zunächst die durch $F(z) := \int_1^z f(t)\,\mathrm{d}t$ definierte Funktion $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; wegen $F'(z) = f(z) > 0$ für $z > 0$ ist sie streng monoton wachsend. Die liminf-Bedingung an f impliziert die Existenz von $\alpha, t_0 \in \mathbb{R}_+$ mit $f(t) \geq \alpha$ für alle reellen $t \geq t_0$. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_1^{t_0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{z} f(t)\mathrm{d}t = F(t_0) + \int_{t_0}^{z} f(t)\mathrm{d}t \\ &\geq F(t_0) + \alpha(z - t_0) \end{aligned} \tag{2}$$

für alle reellen $z \geq t_0$. Daraus folgt, dass $F(z)$ für $z \to \infty$ unbeschränkt ist.

Wir behaupten nun, dass jede Lösung $y(x)$ von (1), die auf $[0, \infty)$ nur positive Werte annimmt, dort nach oben beschränkt ist. (*Lösung* von (1) heisst dabei jede mindestens in $[0, \infty)$ definierte, zweimal differenzierbare Funktion $y(x)$, die dort der Bedingung

$$y'' = -f\,(y(x)) \tag{1'}$$

genügt; $y(x)$ ist dann eo ipso zweimal *stetig* differenzierbar.)

Aus (1) folgt $y'y'' + y'f(y) = 0$, und daraus durch Integration

$$\frac{1}{2}y'(x)^2 - \frac{1}{2}y'(0)^2 = -\int_0^x y'(t)f(y(t))\mathrm{d}t = -\int_{y(0)}^{y(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

oder gleichbedeutend

$$\frac{1}{2}y'(x)^2 + F(y(x)) = \frac{1}{2}y'(0)^2 + F(y(0)).$$

Für jedes reelle $x \geq 0$ mit $y(x) \geq t_0$ folgt mittels (2) aus dieser letzten Gleichung

$$F(t_0) + \alpha(y(x) - t_0) \leq \frac{1}{2}y'(0)^2 + F(y(0)),$$

woraus sich unsere Zwischenbehauptung ergibt.

Angenommen nun, (1) hätte unter den Voraussetzungen der Aufgabe eine Lösung $y(x)$, die in $[0,\infty)$ nur positive Werte annimmt. Wegen $(1')$ ist dann $y''(x) < 0$ für alle $x \geq 0$, d.h. $y'(x)$ fällt in $\mathbb{R}_+$ streng monoton und $\lim_{x\to\infty} y'(x) =: \beta$ existiert (zunächst noch mit der Option $\beta = -\infty$). Weil $y(x)$ nach unserer Zwischenbehauptung nach oben beschränkt ist, gilt $\beta \leq 0$ nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Weil $y(x)$ annahmegemäss auf $[0,\infty)$ nur positive Werte hat, gilt aber auch $\beta \geq 0$. Denn $\beta < 0$ impliziert die Existenz von reellen x_0, γ mit $x_0 \geq 0 > \gamma$ (und $\gamma > \beta$, falls $-\beta \in \mathbb{R}_+$), so dass $y'(x) \leq \gamma$ für alle $x \geq x_0$ gälte; dann wäre für alle $x > x_0$

$$y(x) - y(x_0) = (x - x_0)y'(\xi) \leq \gamma(x - x_0) \qquad \text{mit einem } \xi \in (x_0, x),$$

entgegen $y(x) > 0$. Somit ist

$$\lim_{x\to\infty} y'(x) = 0, \tag{3}$$

d.h. $y'(x) \downarrow 0$. Weil insbesondere $y'(x) > 0$ für alle $x > 0$ ist, wächst $y(x)$ in $[0,\infty)$ streng monoton. Weil $y(x)$ nach oben beschränkt ist, existiert $\lim_{x\to\infty} y(x) =: y_0 \in \mathbb{R}_+$. Aus $(1')$ folgt dann $\lim_{x\to\infty} y''(x) = -f(y_0) < 0$ und somit die Existenz eines $x_1 > 0$, so dass $y''(x) \leq -f(y_0)/2$ für alle $x \geq x_1$ gilt. Daraus ergibt sich

$$y'(x) - y'(x+1) = -y''(x+\vartheta) \geq \frac{1}{2} f(y_0) \qquad \text{für jedes } x \geq x_1$$

mit geeignetem $\vartheta = \vartheta(x) \in (0,1)$. Nach (3) geht hier die linke Seite bei $x \to \infty$ gegen null, und man hat den gewünschten Widerspruch.

Aufgabe 1225. Für welche Polynome $p, q \in \mathbb{R}[x]$ mit gleichem Grad $n \geq 3$ und $p \neq q$ gilt $p \circ q = q \circ p$?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind sechs Lösungen eingegangen, nämlich von Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D) und Albert Stadler (Dübendorf, CH).

Wir folgen den Überlegungen von *Stefan Grieder*: Seien $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ und $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$ Polynome vom Grad $n \geq 3$ so, dass $p(q(x)) = q(p(x))$. Wir schauen uns das Polynom $p(q(x))$ genauer an:

$$p(q(x)) = a_n\,(q(x))^n + \underbrace{a_{n-1}\,(q(x))^{n-1} + \cdots + a_0}_{\text{Polynom vom Grad } n^2-n}$$

Für die Koeffizienten der Potenzen $x^{n^2-\ell}$ $(0 \leq \ell \leq n-1)$ trägt nur der Term $a_n\,(q(x))^n$ dazu bei.

Mit der Multinomialentwicklung erhält man

$$
\begin{aligned}
a_n\,(q(x))^n &= a_n \left(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0\right)^n \\
&= a_n \left(\sum_{k_0+k_1+\cdots+k_n=n} \frac{n!}{k_n!k_{n-1}!\dots k_0!}\, b_n^{k_n} b_{n-1}^{k_{n-1}} \dots b_0^{k_0}\, x^{nk_n+(n-1)k_{n-1}+\cdots+k_1} \right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n^2} a_n \left(\sum_{\substack{k_0+k_1+\cdots+k_n=n \\ nk_n+(n-1)k_{n-1}+\cdots+k_1=n^2-\ell}} \frac{n!}{k_n!k_{n-1}!\dots k_0!}\, b_n^{k_n} b_{n-1}^{k_{n-1}} \dots b_0^{k_0} \right) x^{n^2-\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n^2} a_n \left(\sum_{\substack{k_0+k_1+\cdots+k_n=n \\ k_{n-1}+2k_{n-2}+\cdots+nk_0=\ell}} \frac{n!}{k_n!k_{n-1}!\dots k_0!}\, b_n^{k_n} b_{n-1}^{k_{n-1}} \dots b_0^{k_0} \right) x^{n^2-\ell}.
\end{aligned}
$$

Die Summe ist über alle $n+1$-Tupel $(k_0, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ zu nehmen, die die geforderten Bedingungen unter dem Summenzeichen erfüllen. Beim letzten Schritt wurde die Bedingung $k_0 + k_1 + \cdots + k_n = n$ nach k_n aufgelöst, in die untere Bedingung eingesetzt und diese wiederum nach ℓ aufgelöst.

Koeffizientenvergleich der Potenzen $x^{n^2-\ell}$ $(0 \le \ell \le n-1)$ der Polynome $p(q(x))$ und $q(p(x))$ führt zum Gleichungssystem für die Variablen $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{k_0+k_1+\cdots+k_n=n \\ k_{n-1}+2k_{n-2}+\cdots+nk_0=\ell}} \frac{n!}{k_n!k_{n-1}!\dots k_0!}\, a_n b_n^{k_n} b_{n-1}^{k_{n-1}} \dots b_0^{k_0} \\
&= \sum_{\substack{k_0+k_1+\cdots+k_n=n \\ k_{n-1}+2k_{n-2}+\cdots+nk_0=\ell}} \frac{n!}{k_n!k_{n-1}!\dots k_0!}\, b_n a_n^{k_n} a_{n-1}^{k_{n-1}} \dots a_0^{k_0}.
\end{aligned}
$$

Für $\ell = 0$ bestehen die Summen nur aus einem Summanden, das dem Tupel

$$(k_0, \dots, k_n) = (0, \dots, 0, n)$$

entspricht:

$$a_n b_n^n = b_n a_n^n \qquad \text{oder} \qquad b_n^{n-1} = a_n^{n-1}$$

mit den Lösungen $b_n = a_n$, wenn n gerade und $b_n = \pm a_n$, wenn n ungerade.

Für $1 \le \ell \le n-1$ bemerkt man, dass die ℓ-te Gleichung nur von den Variablen b_n, b_{n-1}, $\dots$, $b_{n-\ell}$ abhängt und linear in $b_{n-\ell}$ ist. Denn aus der Bedingung $k_{n-1} + \cdots + \ell k_{n-\ell} + \cdots + nk_0 = \ell$ folgt $k_{n-i} = 0$ $(i > \ell)$ und $k_{n-\ell} \le 1$, wobei der Fall $k_{n-\ell} = 1$ tatsächlich vorkommt: $(k_0, \dots, k_n) = (0, \dots, 1, \dots, n-1)$.

Es existiert daher eine eindeutige Lösung für $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1$. Sie lautet:

$$
\begin{aligned}
&(b_n, b_{n-1}, \dots, b_1) = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1), && \text{wenn } b_n = a_n, \\
&(b_n, b_{n-1}, \dots, b_1) = (-a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_1), && \text{wenn } b_n = -a_n, \text{ (und } n \text{ ungerade)}
\end{aligned}
$$

was man durch Einsetzen leicht bestätigt. Das Gesagte gilt auch noch für $\ell = n$ – d.h. die Gleichung ist linear in b_0, auch wenn man hier $a_{n-1}\,(q(x))^{n-1}$ resp. $b_{n-1}\,(p(x))^{n-1}$ berücksichtigen muss. Im Falle $b_n = a_n$ erhält man sicher $b_0 = a_0$, da für $q(x) = p(x)$ die erwünschte Identität natürlich gilt.

Im folgenden sei n ungerade und $q(x) = -p(x) + 2c$. Aus der geforderten Identität $p(q(x)) = q(p(x))$ erhält man daraus

$$\begin{aligned} p(q(x)) &= q(p(x)), \\ p(-p(x)+2c) &= -p(p(x)) + 2c, \\ p(-z+2c) &= -p(z) + 2c, \end{aligned}$$

wenn man zuletzt $z = p(x)$ substituiert. Da die Zahlen z und $-z + 2c$ symmetrisch bezüglich c liegen, besagt die letzte Gleichung, dass der Graph von $p(z)$ punktsymmetrisch bezüglich des Punktes (c, c) ist. (Man beachte auch, dass wegen n ungerade $z = p(x)$ die ganze reelle Achse durchläuft.)

Da sich die ganze Argumentationskette umkehren lässt, haben wir die Lösung gefunden: Sei $p(x)$ ein Polynom, dessen Graph symmetrisch ist bezüglich (c, c), d.h. $p(x)$ besitzt eine Darstellung

$$p(x) = c + \sum_{i=0}^{k} a_i (x-c)^{2i+1}.$$

Sei $q(x) = -p(x) + 2c$, d.h.

$$q(x) = c - \sum_{i=0}^{k} a_i (x-c)^{2i+1}.$$

Dann gilt $p(q(x)) = q(p(x))$.

Aufgabe 1226 (Die einfache dritte Aufgabe). Wir betrachten vier Punkte A, B, C, D in allgemeiner Lage im Raum und einen weiteren variablen Punkt X. Mit $|PQRS|$ soll der Inhalt des Tetraeders mit den Eckpunkten P, Q, R, S bezeichnet werden. Die Menge $\mathcal{S}$ bestehe aus allen Punkten X, welche der Bedingung

$$|ABCX|^2 + |BCDX|^2 + |CDAX|^2 + |DABX|^2 = |ABCD|^2$$

genügen. Zeige, dass $\mathcal{S}$ eine Ellipsoidfläche ist, welche die Punkte A, B, C, D enthält und unter allen solchen den kleinsten Rauminhalt umschliesst.

Hans Rudolf Schneebeli, Wettingen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind vier Zuschriften eingegangen: Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A) und Erwin Kasparek (Katowice, PL).

Die folgende Lösung wurde von der Redaktion aus den eingesandten Lösungen und der Lösung des Aufgabenstellers zusammenkomponiert: Wir lösen die Aufgabe zuerst für den

Spezialfall, in welchem die vier festen Punkte die Ecken eines regulären Tetraeders bilden. Es seien $\tilde{A} = (1, 1, -1)$, $\tilde{B} = (1, -1, 1)$, $\tilde{C} = (-1, 1, 1)$ und $\tilde{D} = (-1, -1, -1)$ die festen und $X = (x, y, z)$ der variable Punkt. Die Bedingung $|\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}X|^2 + |\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}X|^2 + |\tilde{C}\tilde{D}\tilde{A}X|^2 + |\tilde{D}\tilde{A}\tilde{B}X|^2 = |\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}|^2$ lautet dann

$$\frac{4}{9}\Big((x+y+z-1)^2 + (x+y-z+1)^2 + (x-y+z+1)^2 + (-x+y+z+1)^2\Big) = \frac{64}{9},$$

und die umgeformte Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

zeigt, dass in diesem Fall die gesuchte Fläche $\tilde{\mathcal{S}}$ die dem Tetraeder umbeschriebene Kugel ist.

Sind nun A, B, C und D Punkte in allgemeiner Lage, gibt es stets eine eindeutig bestimmte affine Abbildung f, welche das Punktequadrupel $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ auf (A, B, C, D) abbildet. Weil jedes der fünf beteiligten Volumen sich mit $|\det(f)|$ multipliziert, ist die gestellte Bedingung eine Invariante der affinen Abbildung, und die gesuchte Fläche $\mathcal{S}$ ist deshalb das Bild $f(\tilde{\mathcal{S}})$, also ein Ellipsoid. Weil die Kugel $\tilde{\mathcal{S}}$ unter allen Ellipsoiden, welche sich dem regulären Tetraeder $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ umbeschreiben lassen, das kleinste Volumen besitzt, besitzt auch das Ellipsoid $f(\tilde{\mathcal{S}})$ das kleinste Volumen unter allen dem Tetraeder $ABCD$ umbeschriebenen Ellipsoiden.